Indices analytiques à support compact pour des groupoïdes de Lie

Paulo Carrillo Rouse

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU

Thèse de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Paulo Roberto Carrillo-Rouse

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris 7

Indices analytiques à support compact pour des groupoïdes de Lie.

Thèse soutenue le 12 décembre 2007 devant le jury composé de :

M. Moulay BENAMEUR
M. Alain CONNES
M. Eric LEICHTNAM
M. Bertrand MONTHUBERT
M. Jean RENAULT
M. Georges SKANDALIS Directeur de thèse

Rapporteurs :

M. Moulay BENAMEUR

M. Victor NISTOR

REMERCIEMENTS[1]

J'ai eu la grande chance de pouvoir travailler sous la direction de Georges Skandalis depuis mon année de DEA. Pour la thèse, il m'a proposé un sujet passionnant et de grand intérêt mathématique, a répondu très gentiment à toutes mes questions avec une patience remarquable et a su me donner les conseils précis aux bons moments. J'ai bénéficié de son grand savoir et de son intuition mathématique tout autant que de ses qualités humaines. Je voudrais le remercier sincèrement pour tout cela et spécialement pour m'avoir fait confiance depuis le tout début.

Je remercie beaucoup Moulay Benameur et Victor Nistor, qui ont bien voulu être les rapporteurs de cette thèse.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Alain Connes, Eric Leichtnam, Bertrand Monthubert et Jean Renault pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Le cadre de travail dont j'ai beaucoup bénéficié ces années a été exceptionnel de tous les point de vues, en grande partie grâce aux gens de l'équipe d'algèbres d'opérateurs de l'IMJ, qu'en plus d'être très compétents, ont toujours été accueillantes et sympatiques. Je remercie spécialement à Etienne Blanchard, Pierre-Yves Le Gall, Frédéric Paugam, Stefaan Vaes, Stéphane Vassout et Andrzej Zuk.

Du côté des thésards, Maria Paula Gomez est à la fois une amie et une compagne de la route ardue mais généreuse des mathématiques, Athina Mageira, Benoît Jacob, Cyril Houdayer, Mostafa Esfahani, Jeremie Brieussel et Jean-Francois Planchat (à qui de plus je remercie profondément pour sa précieuse aide au niveau de la rédaction de l'introduction), je pense à vous tous avec beaucoup d'affection.

En appartenant à l'équipe d'algèbres d'opérateurs de l'IMJ, j'ai eu aussi la possibilité de faire partie de la grande famille française de la même spécialité. À Metz : je souhaite remercier Moulay Benameur, qui par ses remarques et ses conseils a contribué directement à mon travail. Il a eu aussi l'amabilité de m'inviter à Metz où j'ai pu exposer mon travail. Je remercie également Jean-Louis Tu, qui m'a proposé de donner des exposés lors des séminaires très significatifs. Je salue Sara Azzali, Frédéric Albert et Indrava

[1]Esta tésis fue financiada por CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México). Agradezco a esta instituión por su constante apoyo.

Roy. À Toulouse : je souhaite remercier Bertrand Monthubert, qui très aimablement m'a invité passer quelques jours à Toulouse où j'ai pu exposer mon travail lors du séminaire et profiter des discussions mathématiques très intéressantes avec lui. Je remercie Jean Renault, Claire Debord et Jean Marie Lescure pour l'intérêt qui ont montré envers mon travail depuis le début. Je salue également Pierre Clare, Florent Julliard et Haija Moustafa.

Du côté de l'administration à Chevaleret, il y a des gens dont leur efficacité et gentillesse ont fait de ce lieu de travail un endroit très agréable. Je pense spécialement à Madame Wasse, Madame Prosper, Gilles Godefroy et Olivier (de la Bibliothèque). Merci ! ! ! !

Je veux remercier à Paolo Piazza pour m'avoir invité à l'Universitá la Sapienza en Rome, où j'ai passé quelques jours dans des conditions de travail excellentes, d'ailleurs, j'apprécie énormément les discussions très productives que l'on a eu. Je remercie également Paolo Antonini pour son hospitalité pendant ce séjour. J'espère vraiment que la collaboration avec ce groupe italien continuera.

Depuis presque cinq ans l'institut de Chevaleret a été comme chez moi, je le dois en grande mesure à toutes les gens superbes que j'ai pu retrouver pendant ce temps et dont j'estime beaucoup : Amadeo, Maria, José, Giovanni, Claire, Nico, Yann, Luca, Mairi, Juliette, Cecilia, Nabil, Farid, Laura, Myriam, Duda, Munir, Thomas, Daniel.

En dehors de Chevaleret j'ai eu également l'opportunité de rencontrer des gens magnifiques qui maintenant je considère comme de ma famille. Elodie, Michelle et Madame et Monsieur Serraire. À eux : merci de tout coeur pour vos attentions vers moi et vers Sele.

Qué hubiera sido de mi sin un pedazito de mi pais ? Desde el principio conté con el apoyo y la amistad de Tavo, despues los refuerzos fueron llegando progresivamente, pienso especialmente en Maurice, El Mau y Elsa, y a ahora mas recientemente en mi amiga de toda la vida, Marge, junto con su recientemente esposo Brice, a todos ustedes muchas gracias.

Nada de esto hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mis padres, Evangelina y Roberto, y mis hermanos, Edysa y Cesar. Aunque parezca comercial de *[2] ; tener su confianza y amor no tiene precio.

[2] Reconocida marca de tarjetas de credito

También quiero aprovechar esta ocasion para agradecer a mi otra familia (la de Sele). Siempre han creido en mi y nos han apoyado en todos nuestros proyectos.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'incassable support de Sele. Depuis qu'on a discuté pour les premières fois sur la possibilité de venir en France, elle m'a fait savoir qu'elle me supporterait toujours. Cela est très difficile à dire, mais c'est encore plus dur d'accomplir. Je remercie depuis le plus profond de mon être à ma meilleure amie, l'amour de ma vie, SELE.

Indices analytiques à support compact pour des groupoïdes de Lie

Paulo Roberto Carrillo Rouse

Table des matières

Introduction 1

Chapitre 1. Théorie de l'indice 19
- 1.1. K-théorie 19
- 1.2. Indices analytiques et théorèmes de l'indice 29
- 1.3. Cohomologie cyclique et accouplements avec la K-théorie 31

Chapitre 2. Groupoïdes de Lie 41
- 2.1. Groupoïdes de Lie 41
- 2.2. Algèbres associées à un groupoïde de Lie 46
- 2.3. Théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie 49

Chapitre 3. Déformation au cône normal 55
- 3.1. Déformation au cône normal 55
- 3.2. Fonctorialité de la Déformation au cône normal 59
- 3.3. Le groupoïde adiabatique et le groupoïde tangent 62
- 3.4. Théorie de l'indice et déformations 65

Chapitre 4. Une Algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent 69
- 4.1. Le cas des fibrés vectoriels 69
- 4.2. Un espace de Schwartz pour une Déformation au cône normal 73
- 4.3. Une algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent 80

Chapitre 5. Indice analytique à support compact 85
- 5.1. Indices analytiques à support compact d'un groupoïde de Lie 85
- 5.2. Propriétés de l'indice analytique à support compact 94

Chapitre 6. Applications 101
- 6.1. Un théorème de l'indice longitudinal 101
- 6.2. Accouplements avec de cocycles cycliques bornés 105
- 6.3. Cohomologie cyclique bornée 110
- 6.4. Corollaires géométriques 116

Bibliographie 125

Introduction

Cette thèse porte sur la “Théorie de l'indice pour des groupoïdes de Lie”, plus précisément sur la définition et l'étude de certains indices analytiques pour des groupoïdes de Lie, ainsi que les applications qui en découlent.

La Théorie de l'indice (classique) a comme point de départ le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [**AS68a**] : étant donnée une variété compacte M, un opérateur pseudodifférentiel elliptique D a un noyau et un conoyau de dimension finie. L'indice de Fredholm peut être défini comme

$$ind\,D := dim\,Ker\,D - dim\,Coker\,D \in \mathbb{Z}.$$

Au début des années 50, Gelfand a posé le problème de calculer l'indice d'un opérateur elliptique par des formules topologiques. La solution de ce problème a été obtenue dans une série d'articles dans les années 60 par Atiyah et Singer [**AS63, AS68a, AS68b**]. Au delà des formules d'indice et des applications qu'Atiyah et Singer ont trouvées, les outils et techniques qu'ils ont été amenés à construire et utiliser, sont à la base de nombreux travaux dans des domaines des mathématiques très différents. En particulier, ils ont produit des constructions fondamentales en K-théorie. En effet, l'application $D \mapsto ind\,D$ est entièrement codifiée par un morphisme de groupes

$$ind_{a,M} : K^0(T^*M) \to \mathbb{Z},$$

appelé l'indice analytique de M. Autrement dit, si $Ell(M)$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques sur M, alors on a le diagramme commutatif suivant :

(1)
$$\begin{tikzcd} Ell(M) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & \mathbb{Z} \\ K^0(T^*M) \arrow[ur, "ind_{a,M}"'] & \end{tikzcd},$$

où $Ell(M) \xrightarrow{symb} K^0(T^*M)$ est l'application surjective qui associe à un opérateur la classe de son symbole principal dans $K^0(T^*M)$. Cette propriété fondamentale permet d'utiliser les méthodes et les outils de $K-$théorie et donne une stabilité à l'indice. En fait, Atiyah-Singer ont défini un morphisme de groupes $ind_{t,M} : K^0(T^*M) \to \mathbb{Z}$, appelé l'indice topologique de M. Ensuite, ils vérifient qu'il existe un unique morphisme de $K^0(T^*M)$ dans $\mathbb{Z}$ qui satisfait certains axiomes (des propriétés K-théoriques) qui sont satisfaits de manière immédiate par l'indice topologique. Ils montrent après que l'indice analytique les satisfait aussi. Cette façon d'établir le théorème de l'indice permet immédiatement de se placer dans des cadres plus généraux. Déjà dans la série des articles mentionnés ci-dessus, Atiyah et Singer ont établi un théorème de l'indice pour des familles de variétés (des fibrations). Dans ce cas on a des familles d'opérateurs, et l'indice d'une telle famille n'est plus un nombre entier mais un élément d'un groupe de K-théorie. De nouveau, ces indices sont déterminés par un morphisme de groupes de K-théorie qui s'obtient aussi de façon topologique [**AS68b**]. L'importance de ces morphismes topologiques vient aussi de ce qu'ils sont calculables par des méthodes cohomologiques (théorie de Chern-Weil). Par exemple, dans le cas d'un opérateur P sur une variété M, la formule de l'indice s'écrit

$$ind_{t,M}([\sigma_P]) = \int_{TM} ch([\sigma_P])Td(M), \tag{2}$$

où $ch : K^0(TM) \to H^*(TM)$ est le caractère de Chern et $Td(M)$ est une classe caractéristique de la variété M. Ces types des formules géométriques donnent des invariants très intéressants de la variété [**LM89, Mel93, Sha78**].

On veut à présent placer la discussion au cadre des groupoïdes. Ceux-ci généralisent entre autres les notions d'espace, de groupe et de relation d'équivalence [**Mac87, Ren80, Pat99**]. Ils constituent un bon cadre pour certains espaces singuliers provenant de la géométrie comme les espaces d'orbites d'une action, les espaces de feuilles d'un feuilletage [**Con79**] et les orbifolds. Il y a aussi des groupoïdes associés à certaines variétés coniques ou à bord [**DLN06, Mel93, Mon03**]. Une manière rapide et élégante de définir un groupoïde est comme une petite catégorie où tous les morphismes sont inversibles (voir 2.1.1 pour une définition plus intuitive). Nous sommes intéressés au cas des groupoïdes de Lie, qui sont des groupoïdes où tous les ensembles qui interviennent sont des variétés et tous les morphismes des applications différentiables.

Pour les groupoïdes de Lie il y a un calcul pseudodifférentiel, développé au cours des années par Connes [**Con79**], Monthubert-Pierrot [**MP97**] et Nistor-Weinstein-Xu [**NWX99**], voir aussi [**Mel93, Mon03, Vas01**]. Ceci permet de parler des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques et de leurs indices dans ce cadre. Le but de la théorie de l'indice pour des groupoïdes de Lie est d'obtenir des invariants géométriques et topologiques d'un tel groupoïde à partir des opérateurs elliptiques.

Par rapport au cas classique, la théorie de l'indice pour des groupoïdes de Lie présente, comme on verra ci-dessous, des nouveaux phénomènes. L'étude des indices et ses invariants sera donc plus délicate. Si $\mathscr{G}$ est un groupoïde de Lie, un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel est une famille d'opérateurs qui satisfait une condition d'invariance par rapport à $\mathscr{G}$. Soit P un tel opérateur elliptique, l'indice de P, $ind\, P$, est un élément de $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Rappelons que du point de vue non commutatif, l'algèbre de convolution $C_c^\infty(\mathscr{G})$ joue le rôle de l'algèbre des fonctions différentiables sur l'espace "singulier" représenté par le groupoïde, tandis que la C^*-algèbre (réduite) associé au groupoïde joue le rôle de l'algèbre des fonctions continues ([**Ren80, Con79, Con94, Pat99**]). De manière analogue au cas classique (diagramme (1) ci-dessus), on a deux applications qui partent de $Ell(\mathscr{G})$, l'ensemble des $\mathscr{G}$-opérateurs pseudodifférentiels elliptiques : le symbole principal (plutôt sa classe en K-théorie) et l'indice ind :

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, dotted, "\nexists"'] & \end{tikzcd} , \tag{3}$$

Comme on a mentionné ci-dessus pour le cas classique, on pourrait souhaiter que l'application $D \mapsto ind\, D \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ se factorise à travers $K^0(A^*\mathscr{G})$: ce groupe codifie les symboles principaux de tous les $\mathscr{G}-$opérateurs pseudodifférentiels elliptiques et en général les calculs au niveau symbolique deviennent plus simples ; de plus les groupes de K-théorie topologique possèdent des propriétés cohomologiques très remarquables. Malheureusement, l'application $D \mapsto ind\, D \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ ne se factorise pas en général à travers le symbole principal. Autrement dit, dans le diagramme ci-dessus la flèche pointillée peut ne pas exister.

Cependant, si l'on considère le morphisme en K-théorie

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \tag{4}$$

donné par l'inclusion $C_c^\infty(\mathscr{G}) \subset C_r^*(\mathscr{G})$, alors la composée

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{ind} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

se factorise à travers le symbole principal par un morphisme que l'on note par ind_a, couramment appelé l'indice analytique de $\mathscr{G}$. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d, "j"] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G})).
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

En fait, l'indice analytique ind_a peut être décrit complètement à l'aide d'un objet géométrique construit à partir du groupoïde de départ, et qui a de plus l'avantage que son utilisation permet de laisser de côté les problèmes techniques du calcul pseudodifférentiel et aussi de donner des preuves de théorèmes d'indice très simples du point de vue conceptuelle [**Con94, MN05, DLN06, ANS06, HS87**]. En effet, on peut définir ce morphisme d'indice en utilisant le groupoïde tangent de Connes. Rappelons que le groupoïde tangent associé à un groupoïde de Lie $\mathscr{G}$ est par définition

$$\mathscr{G}^T := A\mathscr{G} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G} \times (0,1] \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)} \times [0,1],$$

et c'est un groupoïde de Lie compatible avec les structures des groupoïdes de Lie de $A\mathscr{G}$ et de $\mathscr{G}$. La C^*-algèbre de $\mathscr{G}^T$ est un champ continu de C^*-algèbres sur l'intervalle $[0,1]$ dont la fibre en zéro est $C_r^*(A\mathscr{G}) \cong C_0(A^*\mathscr{G})$ et $C_r^*(\mathscr{G})$ en dehors de zéro, il s'agit d'une déformation C^*-algébrique dans le sens de [**Lan03**] (voir aussi [**CCGF$^+$99**]). En particulier, on a une suite exacte courte de C^*-algèbres,

$$0 \to C_r^*(\mathscr{G} \times (0,1]) \longrightarrow C_r^*(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_0} C_r^*(A\mathscr{G}) \to 0, \tag{6}$$

où ev_0 est l'évaluation en zéro. Les propriétés de la K-théorie des C^*-algèbres impliquent immédiatement que $K_0(C_r^*(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{(ev_0)_*} K_0(C_r^*(A\mathscr{G}))$ est un isomorphisme. Dans [**MP97**], Monthubert-Pierrot montrent que

$$ind_a = (ev_1)_* \circ (ev_0)_*^{-1}, \tag{7}$$

où $C_r^*(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_1} C_r^*(\mathscr{G})$ est l'évaluation en 1. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
K_0(C_r^*(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_0", "\cong"'] \arrow[d, "e_1"'] & K^0(A^*\mathscr{G})) \arrow[dl, "ind_a"] \\
K_0(C_r^*(\mathscr{G})) &
\end{tikzcd}
.
$$

Le groupoïde tangent a été introduit par Connes pour le cas d'une variété. Il se généralise immédiatement au cas des groupoïdes de Lie, et a été utilisé dans [**HS87**] pour trouver des morphismes d'indice comme ci-dessus.

Lorsqu'on essaie d'adapter les arguments précédents pour l'indice $ind\, D \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$, on rencontre plusieurs difficultés : le fait que les algèbres du type $C_c^\infty(\mathscr{G})$[1] ne sont pas des C^*-algèbres (même pas une algèbre de Banach) induit une grande différence [**Ros94, CMR07**] ; par exemple $K_0(C_c^\infty(A\mathscr{G}))$ ne correspond pas au groupe que l'on voudrait, $K^0(A^*\mathscr{G})$. Lorsque le groupoïde est propre, on ne remarque pas cette nuance : le morphisme $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est un isomorphisme. Ceci est dû au fait que dans ces cas, $C_c^\infty(\mathscr{G})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe ([**CMR07, Kar78**]). Dans le cas contraire, ce morphisme n'est pas un isomorphisme. Un exemple simple de cette situation est $\mathbb{R} \rightrightarrows \{*\}$ avec la structure de groupe de $\mathbb{R}$ ([**Con94**], p.142). De plus, les groupes de $K-$théorie du type $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ ne satisfont pas en général certaines propriétés comme l'invariance homotopique et la périodicité de Bott.

Un premier but de cette thèse est de considérer un "bon quotient" de $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ dans lequel on puisse factoriser l'indice $[ind\, D] \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))/\sim$ à travers le symbole principal, en utilisant pour cela le groupoïde tangent de Connes. On veut avoir des diagrammes commutatifs du type :

(8)
$$\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[dd, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d] \\
 & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))/\sim \arrow[d] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a"'] \arrow[uur, dotted, "\nexists"] \arrow[ur] & K_0(C_r^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))).
\end{tikzcd}$$

Notons, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ le groupe quotient de $K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$ par la relation d'équivalence (homotopie dénotée par $\sim_h$) induit par

$$K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])) \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} K_0(C_c^k(\mathscr{G})).$$

Soit

$$K_0^F(\mathscr{G}) = \varprojlim_k K_0^{h,k}(\mathscr{G})$$

la limite projective relative aux inclusions canoniques $C_c^k(\mathscr{G}) \subset C_c^{k-1}(\mathscr{G})$. Le résultat principal de ce travail est donc le suivant.

[1] avec leur topologie classique

Théorème. *Il existe un morphisme de groupes*

$$ind_a^F : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G}) \tag{9}$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[dd, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d] \\
 & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a"'] \arrow[ur, "ind_a^F"] & K_0(C_r^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

On appelle le morphisme du théorème *"l'indice analytique à support compact de $\mathscr{G}$"*. En fait, on montre qu'il y a un indice analytique (d'ordre k) pour chaque $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$, mais on peut les mettre ensemble en prenant $K_0^F(\mathscr{G})$. Pour $k = +\infty$ ce n'est plus vrai : même si l'on considère $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))/\sim_h$, la composition

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{ind} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \longrightarrow K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))/\sim_h,$$

ne se factorise pas, en général, à travers le symbole principal (là encore $\mathbb{R} \rightrightarrows \{*\}$ est un contre-exemple).

Comme on verra plus bas, perdre la condition d'infiniment différentiable ne présente aucun inconvénient au moment de faire les calculs. Avant de parler de ce sujet plus en détail, on va discuter le théorème ci-dessus et essayer en même temps d'expliquer le phénomène suivant : l'indice au niveau C_c^k modulo homotopie se factorise à travers le symbole principal tandis que ce n'est plus le cas au niveau C_c^∞.

La construction de nos indices (à support compact) est aussi basée sur le groupoïde tangent, comme dans le cas des C^*-algèbres. En fait, ce groupoïde est un cas particulier d'une déformation au cône normal : étant donnée une inclusion $X \subset M$ d'une sous-variété dans une variété, l'ensemble

$$\mathscr{D}_X^M := \mathscr{N}_X^M \times \{0\} \bigsqcup M \times [0,1]$$

où $\mathscr{N}_X^M$ est le fibré normal à l'inclusion, admet une structure de variété C^∞ de manière que $M \times (0,1]$ est un ouvert et $\mathscr{N}_X^M$ une sous-variété fermée. Dans le cas de $\mathscr{G}^{(0)} \subset \mathscr{G}$, on a $\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}} := \mathscr{G}^T$. Nous construisons ensuite un espace vectoriel $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$ composé de fonctions C^∞ sur $\mathscr{D}_X^M$, et qui, fondamentalement, est un champ d'espaces dont les fibres sont

$$\mathscr{S}(\mathscr{N}_X^M) \text{ en } t = 0, \text{ et}$$

$$C_c^\infty(M) \text{ pour } t \neq 0,$$

où $\mathscr{S}(\mathscr{N}_X^M)$ est l'algèbre de Schwartz sur le fibré vectoriel $\mathscr{N}_X^M$ (Section 4.1). Pour le cas d'un groupoïde de Lie $\mathscr{G}$, on a le résultat suivant.

THÉORÈME. *L'espace $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ est stable par convolution : autrement dit, on a des inclusions d'algèbres*

$$C_c^\infty(\mathscr{G}^T) \subset \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \subset C_r^*(\mathscr{G}^T).$$

Cette algèbre est un champ d'algèbres sur l'intervalle $[0,1]$*, dont les fibres sont*

$$\mathscr{S}(A\mathscr{G}) \text{ en } t=0, \text{ et}$$

$$C_c^\infty(\mathscr{G}) \text{ pour } t \neq 0.$$

On dispose donc d'une déformation de $C_c^\infty(\mathscr{G})$, qui est une sous-algèbre de $C_r^*(\mathscr{G})$ qui n'est pas en général stable par calcul fonctionnel holomorphe, en une algèbre, $\mathscr{S}(A\mathscr{G}) \cong \mathscr{S}(A^*\mathscr{G})$ qui est toujours stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_0(A^*\mathscr{G})$. Cela correspond bien à l'esprit du groupoïde tangent, qui déforme un groupoïde "non commutatif", $\mathscr{G}$, en un groupoïde "commutatif", $A\mathscr{G}$. Ainsi, de manière similaire au cas C^*, nos indices $ind_a^{h,k}$ sont aussi obtenus comme déformations. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "e_1^{h,k}"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "ind_a^{h,k}"] & 0 \\
K_0^{h,k}(\mathscr{G}) & &
\end{tikzcd},$$

où $e_1^{h,k} : K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ est le morphisme induit par l'évaluation en $t=1$ suivi du morphisme quotient. Le diagramme précédent montre qu'il suffit de montrer que $Ker\, e_0 \subset Ker\, e_1^{h,k}$. Cela résulte principalement de la solution d'un problème analytique (lemme 5.1.10) : soit $f \in \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand, l'application f_k définie sur $\mathscr{G} \times [0,1]$ par

$$f_k(\gamma,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ t^N f(\gamma,t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases},$$

appartient à $C_c^k(\mathscr{G}\times[0,1])$. En résumé, c'est à partir de la structure géométrique du groupoïde tangent que l'on montre que les indices se factorisent au niveau $C_c^k(\mathscr{G})$ modulo homotopie.

Applications.

Théorème de l'indice longitudinal renforcé. Pour le cas où le groupoïde est le groupoïde d'holonomie d'une variété feuilletée, on dispose d'un théorème de l'indice longitudinal. Or, pour construire l'indice topologique longitudinal dans notre cadre et démontrer un théorème de l'indice, on est amené à modifier un peu nos groupes de K-théorie finie, $K_0^F(\mathscr{G})$.

Comme on voit dans la section 6.2, l'indice ind_a^F est compatible avec le morphisme de Bott : pour un groupoïde de Lie on a un morphisme de Bott

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{Bott} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^2))$$

donné par le produit avec l'élément de Bott $\beta \in K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \cong K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$. Ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme contrairement au cas des C^*-algèbres. Cependant il induit un morphisme universel

$$Bott_F : K_0^F(\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \tag{10}$$

compatible avec l'indice analytique à support compact, *i.e.*, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}}^F"] \arrow[d, "Bott"'] & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[d, "Bott_F"] \\ K^0(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}}^F"'] & K_0^F(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \end{tikzcd}$$

Considérons la limite inductive

$$K_0^{B,F}(\mathscr{G}) := \varinjlim_m K_0^F(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}) \tag{11}$$

induite par le système $K_0^F(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}) \xrightarrow{Bott} K_0^F(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2(m+1)})$. Ce groupe a encore la propriété désirée : il est intermédiaire aux niveaux C_c^∞ et C^* (section 6.1). On pose

$$ind_{a,\mathscr{G}}^{B,F} : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G})$$

le morphisme donné par la composition de $ind_{a,\mathscr{G}}^F : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G})$ avec $K_0^F(\mathscr{G}) \xrightarrow{Bott} K_0^{B,F}(\mathscr{G})$. On l'appelle *"l'indice analytique périodique de $\mathscr{G}$"*. Le théorème est le suivant.

Théorème (Théorème de l'indice longitudinal renforcé). *Soit* (M, F) *une variété feuilletée.*

(a) L'indice topologique longitudinal à la Connes-Skandalis peut être défini dans le groupe $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$ *(voir 6.1.4).*

(b) Si $ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F} : K^0(T^*F) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G})$ *désigne l'indice topologique ci-dessus, alors*

$$ind_{a,\mathscr{G}}^{B,F} = ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F}.$$

Le théorème précédent est une version plus primitive du théorème de l'indice longitudinal de Connes-Skandalis [**CS84**] : en effet, il atteste que l'égalité des C^*-indices a lieu déjà dans le groupe $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$.

Les théorèmes précédents impliquent que l'on peut aussi définir un morphisme de Baum-Connes dans notre cadre : on rappelle que la correspondance

$$D \mapsto ind_a(D) \in K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

permet de construire le morphisme d'assemblage

$$\mu : K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \tag{12}$$

par la formule $\mu(\delta_D) = ind_a(\sigma_D)$. Ce morphisme a été défini par Baum et Connes [**BC00**] pour le cas des groupes (voir [**Tu99, Tu00**] pour les cas des groupoïdes).

Dans notre cadre, le morphisme d'assemblage qui correspond est un morphisme

$$\mu_F : K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G}). \tag{13}$$

donné exactement comme en (12) mais avec l'indice analytique périodique, c'est à dire, $\mu_F(\delta_D) = ind_a^{B,F}(\sigma_D)$. Par définition on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\mu_F"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \\ & K_0^{B,F}(\mathscr{G}). \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{14}$$

Question 1. On peut se demander si le morphisme μ_F est injectif, surjectif ou bijectif, puis s'interroger sur le lien avec ces mêmes propriétés pour μ. On peut également se poser les mêmes questions pour le morphisme $i : K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$. On rappelle que la conjecture de Baum-Connes prévoit que le morphisme d'assemblage μ est un isomorphisme. Son importance repose sur les conséquences géométriques et analytiques qui en découlent [**BCH94**] (voir aussi exemple 1. ci-après).

Accouplements avec la cohomologie cyclique. On va expliquer à présent notre motivation principale pour définir les indices analytiques au niveau des algèbres de fonctions à support compact. Dans la pratique c'est pour ces types d'algèbres que l'on peut faire des calculs via la cohomologie cyclique : en effet, on a la théorie de Chern-Weil-Connes à notre disposition. Dans ce cadre on a un accouplement [**Con85, Con94, Kar87**]

$$\langle \_ , \_ \rangle : K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \times HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \to \mathbb{C} \tag{15}$$

On dispose de plusieurs cocycles cycliques sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$. On veut calculer cet accouplement afin d'obtenir des invariants numériques [**Con94, CM90, Con86**] à partir des indices dans $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$.

Or, on ne peut espérer un calcul (topologique) simple que si l'application $D \mapsto \langle D , \tau \rangle$ ($\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ fixe) se factorise à travers la classe du symbole[2] de D, $[\sigma(D)] \in K^0(A^*\mathscr{G})$: on veut avoir un diagramme du type :

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "\langle \_ , \tau \rangle"] & \mathbb{C} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[urr, dotted, "\tau"'] & & \end{tikzcd} .$$

L'étape suivante de cette thèse consiste à résoudre (dans une grande mesure) ce problème de factorisation en utilisant les indices à support compact. En fait, la théorie de Chern-Connes s'applique de manière naturelle aux algèbres du type $C_c^k(\mathscr{G})$. De plus, l'accouplement avec la cohomologie Périodique préserve en général la relation $\sim_h$ et il est compatible avec le morphisme de Bott. Comme on l'a mentionné ci-dessus, le fait que ces techniques de calcul se prolongent facilement est dû plus à la condition sur le support compact qu'à la condition d'être de classe C^∞.

On dit qu'un cocycle cyclique continu τ sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$ est borné si sa formule ne fait apparaître qu'un nombre fini de dérivées, *i.e.*, s'il s'étend par continuité à $C_c^k(\mathscr{G})$ pour un certain k. On démontre le résultat suivant.

Proposition. *Soit τ un cocycle cyclique continu borné. Alors τ définit un morphisme $\varphi_\tau : K_0^F(\mathscr{G}) \to \mathbb{C}$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "\langle \_ , \tau \rangle"] \arrow[d] & \mathbb{C} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a^F"'] & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[ur, "\varphi_\tau"'] & \end{tikzcd} .$$

[2]Tous les cas connus passent à travers les symboles.

En particulier, pour D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique, on a la formule suivante

$$\varphi_\tau(ind_a^F([\sigma(D)])) =< ind\, D, \tau > . \tag{16}$$

Pour le cas des groupoïdes étales, tous les cocycles cycliques provenant de la géométrie sont continus et bornés : dans [**Con86**], Connes a construit un morphisme de groupes

$$\phi : H^*_\tau(B\mathscr{G}) \to HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})), \tag{17}$$

et il a montré qu'il s'agit d'une inclusion comme facteur direct (voir aussi [**Con94**], $III.2.\delta$). On vérifie en effet que les cocycles cycliques images par ce morphisme sont continus et bornés (section 6.3). En particulier, les cocycles cycliques de groupes, la classe fondamentale transverse, Godbillon-Vey et toutes les classes caractéristiques provenant de la cohomologie de Gelfand-Fuchs sont continus et bornés. On utilise ensuite le calcul de la cohomologie cyclique périodique $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ [**BN94, Cra99**] pour conclure que, pour tout cocycle $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$, on a toujours le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "\langle \_,\tau\rangle"] & \mathbb{C} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[urr, "\Psi_\tau"'] & & \end{tikzcd} , \tag{18}$$

où $\Psi_\tau = \varphi_\tau \circ ind_a^F$ avec φ_τ le morphisme de la proposition ci-dessus.

Une question naturelle est comment calculer effectivement les morphismes Ψ_τ ci-dessus. En fait, dans les cas des groupoïdes étales[3], le calcul se ramène pour beaucoup de cocycles à des calculs déjà effectués. Par exemple, Connes a calculé

$$\langle \phi(c), ind\, D\rangle \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

où ϕ est l'application en (17). Le résultat est le suivant.

Théorème (Connes, théorème 12 dans [**Con94**] pp. 272). *Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde étale. Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique sur une $\mathscr{G}$-variété propre P avec $P/\mathscr{G}$ compacte. Soit $c \in H^*_\tau(B\mathscr{G})$ de dégrée total $2q$, alors on a*

$$\langle \phi(c), ind\, D\rangle = (2\pi i)^{-q} \langle c, ch_\tau([\delta_D])\rangle, \tag{20}$$

où $ch_\tau : K_*(B\mathscr{G}) \to H^*_\tau(B\mathscr{G})$ est le caractère de Chern (dual).

[3]ou des groupoïdes Morita équivalentes à des groupoïdes étales

Une preuve de ce résultat a été donnée par Gorokhovsky et Lott dans [**GL03**] en utilisant des super-connections en géométrie non commutative, puis, dans [**GL06**], ils ont généralisé le résultat pour des groupoïdes qui sont Morita équivalents à un groupoïde étale ("Foliation groupoids" dans le sens de [**CM01**]).

Notre observation que l'image de ϕ consiste de cocycles cycliques continus et bornés et le théorème de Connes impliquent immédiatement la formule suivante qui a l'avantage que son côté gauche est donné directement en termes du symbole principal.

Corollaire. *Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde étale. Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique sur une $\mathscr{G}$-variété propre P avec $P/\mathscr{G}$ compacte. Soit $c \in H^*_\tau(B\mathscr{G})$ de dégrée total $2q$, alors on a*

$$\Psi_{\phi_F(c)}([\sigma_D]) = (2\pi i)^{-q}\langle c, ch_\tau([\delta_D])\rangle, \tag{21}$$

où Ψ est comme en (18).

Le problème de factorisation que nous venons de rencontrer est fortement lié à la conjecture de Novikov. Remarquons en effet que si le morphisme

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{\langle\_,\tau\rangle} \mathbb{C}$$

où $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ sur $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ se prolonge à $K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$, alors la factorisation à travers la classe du symbole est immédiate. Néanmoins, comme le montre l'exemple suivant, ce problème est loin d'être évident.

Exemple 1. [**CM90, Con94**] *Soit Γ un groupe discret agissant proprement et librement sur une variété $\tilde{M}$ avec quotient compact $\tilde{M}/\Gamma := M$. Notons $\mathscr{G}$ le quotient de $\tilde{M}\times\tilde{M}$ par l'action diagonale. C'est un groupoïde de Lie $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)} = M$.*

Soit $c \in H^*(\Gamma) := H^*(B\Gamma)$. Connes et Moscovici ont montré dans [**CM90**] *que les hautes signatures de Novikov, $Sign_c(M)$, s'obtiennent comme l'accouplement de l'opérateur de signature D_{sign} et un cocycle cyclique τ_c associé à c :*

$$\langle \tau_c, ind\, D_{sgn}\rangle = Sign_c(M,\psi). \tag{22}$$

La conjecture de Novikov prévoit que toutes ces hautes signatures sont des invariants homotopiques de M. Alors, si $ind\, D_{sign} \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ est un invariant homotopique de (M,ψ) la conjecture de Novikov est vraie. On sait uniquement que $j(ind\, D_{sign}) \in K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est un invariant homotopique. Mais cela ne résout pas la conjecture car on doit prolonger l'action de τ_c à $K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$, ce qui n'est pas du tout évident. Connes-Moscovici ont réussi à montrer que ce cocycle se prolonge pour les groupes hyperboliques.

On va énoncer un théorème de Connes dans le cadre des feuilletages où il a réussi à montrer que certains cocycles se prolongent à la $K-$théorie de la C^*-algèbre. On ne va pas mentionner ses corollaires géométriques, pour cela on renvoie le lecteur à [**Con86**] section 8. Le résultat est le suivant.

Théorème (Connes, théorème 8.1 dans [**Con86**]). *Soit (V,F) une variété feuilletée (non nécessairement compacte) qui est orientée transversalement. Soit $\mathscr{G}$ son groupoïde d'holonomie et $\pi : B\mathscr{G} \to B\Gamma_q$ l'application classifiante ($q = codim\, F$), τ le fibré sur $B\mathscr{G}$ donné par le fibré transverse de (V,F). Soit $\mathcal{R} \subset H^*(B\mathscr{G})$ l'anneau engendré par les classes de Pontrjagin de τ, les classes de Chern des fibrés équivariants par holonomie et $\pi^*(H^*(WO_q))$. Pour tout $c \in \mathcal{R}$ il existe une application additive $\varphi_c : K_*(C_r^*(\mathscr{G})) \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\varphi_c(\mu(x)) = \langle ch_\tau(x), c\rangle \ \forall x \in K_*(C_r^*(\mathscr{G})). \tag{23}$$

Dans l'énoncé, φ_c est justement l'extension à $K_*(C_r^*(\mathscr{G}))$ de

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \stackrel{\langle \phi(c),\cdot\rangle}{\longrightarrow} \mathbb{C}.$$

La preuve utilise de façon fondamentale le théorème de l'indice longitudinal de Connes-Skandalis, [**CS84**].

On peut énoncer un résultat analogue dans notre cadre. La différence est que l'on n'a pas besoin de résultats d'extension, on les a déjà de manière naturelle. En conséquence, notre résultat s'applique à toutes les classes $c \in H^*(B\mathscr{G})$.

Corollaire. *Soit (V,F) une variété feuilletée (non nécessairement compacte) qui est orientée transversalement. Soit $\mathscr{G}$ son groupoïde d'holonomie. Pour tout $c \in H^*(B\mathscr{G})$ il existe une application additive*

$$\varphi_c : K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$\varphi_c(\mu_F(x)) = \langle ch_\tau(x), c\rangle \ \forall x \in K_0^{B,F}(\mathscr{G}). \tag{24}$$

La preuve du corollaire précédent nécessite aussi un théorème de l'indice longitudinal (renforcé).

Question 2. On peut se demander si nos indices sont suffisants pour obtenir des résultats géométriques. Par exemple, dans le cas de l'exemple 1. ci-dessus : est-ce que $ind_a^{B,F}(D)$ est un invariant homotopique ? Une réponse affirmative à cette question implique aussi la conjecture de Novikov (voir aussi question la Question 1. ci-dessus).

Cohomologie de Haefliger. On peut aussi utiliser notre théorème de l'indice longitudinal pour retrouver les formules d'indice en cohomologie de Haefliger obtenues par Benameur-Heitsch dans [**BH04**] (voir aussi des applications dans [**BH05**]), mais en utilisant uniquement la structure géométrique et algébrique du groupoïde d'holonomie.

Benameur et Heitsch commencent par définir un caractère de Chern algébrique

$$ch_a : K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \to H^*_{c,bas}(M/F), \tag{25}$$

où $H^*_{c,bas}(M/F)$ est la cohomologie de Haefliger (voir [**Hae84**] ou [**CM04**]). Ce caractère à la propriété fondamentale d'être compatible avec les "shriek maps" en K-théorie et en cohomologie de Haefliger. De plus, pour le feuilletage $(\mathbb{R}^2, F = 0)$, le caractère $ch_a : K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \to H_c^*(\mathbb{R}^2)$ coïncide avec le caractère de Chern usuel.

Dans la proposition 6.4.9 on vérifie que le caractère se prolonge à notre groupe $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$: le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[d, "ch_a"'] & K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \arrow[dl, "ch_a"] \\ H^*_{c,bas}(M/F) & \end{tikzcd} .$$

Ce fait n'est pas étonnant puisque ch_a est construit à partir de la géométrie du groupoïde d'holonomie de (M, F).

Le résultat principal dans [**BH04**] nécessite l'introduction d'un morphisme $ch_a(ind_t) : K^0(T^*F) \to H^*_{c,bas}(M/F)$ construit à partir de la topologie du groupoïde d'holonomie et du caractère ch_a. L'énoncé est le suivant.

Théorème (Benameur-Heitsch). *Pour tout $u \in K^0(T^*F)$ on a*

$$ch_a(ind_t)(u) = (-1)^p \int_F \pi_F!(ch(u))Td(F \otimes \mathbb{C}) \in H^*_{c,bas}(M/F), \tag{26}$$

où $\pi_F! : H_c^*(F, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ est l'intégration le long des fibres, et $ch : K^0(F) \to H_c^*(F)$ est le caractère de Chern usuel.

En utilisant l'extension de ch_a à $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$, on a que $ch_a(ind_t)$ devient précisément la composition de $ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F}$ avec ch_a. Le résultat suivant est ainsi une conséquence immédiate de notre théorème de l'indice longitudinal et du théorème de Benameur-Heitsch ci-dessus.

Corollaire. *Pour tout $u \in K^0(T^*F)$ on a la formule d'indice suivante*

$$(27) \quad ch_a(ind_a^{B,F}(u)) = (-1)^p \int_F \pi_F!(ch(u))Td(F\otimes\mathbb{C}) \in H^*_{c,bas}(M/F),$$

où $\pi_F! : H^*_c(F,\mathbb{R}) \to H^*(M,\mathbb{R})$ est l'intégration le long des fibres, et $ch : K^0(F) \to H^*_c(F)$ est le caractère de Chern usuel.

Or, grâce aux résultats d'extension de Connes (Thm. 8.1 dans [**Con86**] en particulier) le caractère ch_a se prolonge a $K_0(C^*_r(\mathscr{G}))$ et donc $ch_a(ind_a(u))$ est égal au côté droit de (26).

Dans notre cadre, le corollaire précédent ne nécessite pas de résultats d'extension. On retrouve ainsi les formules d'indice de Benameur-Heitsch en utilisant uniquement la structure géométrique et algébrique du groupoïde d'holonomie du feuilletage. Le fait que les actions d'une très large classe de cocycles cycliques se prolongent de manière naturelle à notre groupe $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$ permet de penser que des formules comme celles de Benameur-Heitsch pourraient être développées à valeurs dans des espace cohomologiques plus complexes et pas uniquement dans $H^*_{c,bas}(M/F)$.

Résumé des chapitres. Donnons à présent un plan plus détaillé des chapitres composant cette thèse et de leur contenu. Les deux premiers sont essentiellement des préliminaires et rappels nécessaires pour faire la théorie de l'indice pour des groupoïdes de Lie. Le troisième chapitre présente un développement de la Déformation au cône normal. Même si cette construction a été utilisée à plusieurs reprises dans la littérature, on n'a pas trouvé une source contenant une exposition complète de ce sujet, cela nous a amené donc à étudier très soigneusement ce thème. Finalement, les trois derniers chapitres présentent les résultats mentionnés ci-dessus. Le dernier contient en particulier des applications à d'autres travaux.

Chapitre 1. Théorie de l'indice. Ce chapitre se veut une introduction rapide à la théorie de l'indice à l'Atiyah-Singer avec le point de vue de la Géométrie non Commutative.

La première partie est un rappel de la K-théorie, surtout celle des algèbres, mais on mentionne aussi quelques liens avec la K-théorie topologique. On donne les résultats les plus importants de la théorie, comme l'existence d'une théorie relative, l'existence de suites exactes et l'invariance par homotopie pour le cas topologique, par exemple.

On continue ensuite avec un rappel succinct du calcul pseudodifférentiel sur une variété de classe C^∞ (compacte). On énonce le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer en $K-$théorie.

On finit ce chapitre en donnant les notions de base de la cohomologie cyclique qui est une généralisation de la cohomologie de de Rham pour des variétés. On rappelle l'existence d'un accouplement entre la Cohomologie cyclique et la K-théorie, qui est une généralisation au cadre non commutatif du caractère de Chern.

Chapitre 2. Groupoïdes de Lie. Dans ce chapitre on rappelle les définitions de base sur les groupoïdes de Lie. On continue avec d'importants exemples.

Ensuite, on rappelle la construction des algèbres associées aux groupoïdes de Lie : l'algèbre de convolution consistant de fonctions de classe C^∞ à support compact et les C^*-algèbres.

Finalement, pour pouvoir faire la théorie de l'indice avec ces objets, on donne un petit résumé sur le calcul pseudodifférentiel pour des groupoïdes de Lie. Ceci nous permet notamment d'introduire des indices analytiques des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques et d'énoncer des théorèmes de l'indice.

Chapitre 3. Déformation au cône normal. Ce chapitre contient une description très détaillée de la construction de la "Déformation au cône normal " associée à un couple (M,X), où M est une variété de classe C^∞ et X est une sous-variété de M.

On commence par décrire très explicitement la structure C^∞ de la Déformation au cône normal d'un couple (M,X) comme ci-dessus, qui est l'ensemble

$$\mathscr{D}_X^M = \mathscr{N}_X^M \times 0 \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*,$$

où $\mathscr{N}_X^M := T_X M/TX$ est le fibré normal à l'inclusion.

Ensuite, on décrit les propriétés fonctorielles que cette construction possède. En effet, on a un foncteur de la catégorie des couples C^∞ dans la catégorie des variétés C^∞. De plus, on voit que ce foncteur a des propriétés additionnelles qui seront de grande utilité dans la suite.

On continue avec une petite section dédiée au groupoïde tangent (et adiabatique). Ce groupoïde est un exemple d'une Déformation au cône normal. On utilise ce fait et les propriétés fonctorielles de ces déformations pour montrer que le groupoïde tangent est un groupoïde de Lie.

On finit ce chapitre par une discussion sur le rôle des groupoïdes tangents dans la théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie.

Chapitre 4. Une algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent. Dans ce chapitre on construit une algèbre de fonctions C^∞ sur le groupoïde tangent qui nous servira dans le chapitre prochain à définir les indices analytiques à support compact pour un groupoïde de Lie. L'algèbre en question sera un champ d'algèbres sur l'intervalle $[0,1]$ dont la fibre en zéro est l'algèbre de Schwartz de l'algébroïde du groupoïde, tandis que les fibres en dehors de zéro sont toutes égales à l'algèbre de convolution des fonctions C^∞ à support compact sur le groupoïde.

On commence par définir les espaces de Schwartz pour des fibrés vectoriels. Le cas particulier qui nous intéresse est l'algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie.

On introduit un espace de fonctions C^∞ sur une déformation au cône normal $\mathscr{D}_X^M$, noté par $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$.

On finit par montrer que pour le cas d'un groupoïde tangent, l'espace $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ est une algèbre associative pour le produit de convolution.

La construction de l'algèbre de Schwartz $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ fera l'objet d'une publication qui devra apparaître bien tôt ([**CR07**]) dans les "Proceedings of the International Conference on K-theory and Noncommutative Geometry, Valladolid 2006" publiés par la Société Mathématique Européenne.

Chapitre 5. Indice analytique à support compact. Ce chapitre a pour but la construction des indices analytiques à support compact pour un groupoïde de Lie. En effet, le résultat principal de cette section et de toute la thèse est la construction explicite des indices $ind_a^{h,F}$ en utilisant l'algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent. On vérifie qu'il s'agit bien des indices analytiques ; en fait pour les cas classiques ces indices coïncident avec ceux déjà définis dans la littérature.

Une fois les indices analytiques à support compact construits, on vérifie qu'ils satisfont deux propriétés essentielles : d'abord, l'indice analytique est compatible avec le morphisme de Bott et ensuite la compatibilité avec des sous-groupoïdes ouverts. Ces deux propriétés nous permettront dans le chapitre suivant de montrer un théorème de l'indice longitudinal dans notre cadre.

Chapitre 6. Applications. Ce Chapitre regroupe les applications. On commence avec un théorème de l'indice longitudinal dans notre cadre. Ceci utilise principalement la compatibilité des indices analytiques à support compact avec le morphisme de Bott.

Ensuite, on montre que l'accouplement $< ind\, D, \tau >$ ne dépend que de la classe du symbole $[\sigma_D] \in K^0(A^*\mathscr{G})$ lorsque τ est un cocycle cyclique continu borné. Pour le cas des groupoïdes étales on remarque que tous les cocycles cycliques provenant de la géométrie du groupoïde sont continus et bornés. On utilise le calcul de la cohomologie cyclique périodique dans [**BN94, Cra99**], pour voir que $D \mapsto < ind\, D, \tau >$ se factorise à travers le groupe $K^0(A^*\mathscr{G})$ pour tout $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$.

On finit avec quelques applications de notre théorème de l'indice longitudinal à des formules d'indice trouvés par Connes [**Con86**] et Benameur-Heitsch [**BH04**].

CHAPITRE 1

Théorie de l'indice

1.1. K-théorie

Soit A une k-algèbre unifère. Pour le propos de cette thèse, on va uniquement considérer le cas où $k = \mathbf{C}$. On veut définir le groupe de $K-$théorie associé à A, noté par $K_0(A)$. On n'aura pas besoin, dans ce travail, de définir les groupes de $K-$théorie de dégré supérieur (les K_n, pour $n \geq 1$).

Commencons par rappeler le groupe de Grothendieck associé à un monoïde commutatif $(M, +)$ (presque un groupe, il n'y a pas d'inverses). Le premier pas est de définir une rélation d'equivalence sur $M \times M$ de la manière suivante : On dira que $(x, y) \sim (x', y')$ s'il existe $z \in M$ tel que $x + y' + z = x' + y + z$. Le groupe de Grothendieck associé à M est par définition l'ensemble

$$G(M) := M \times M / \sim$$

avec l'opération $[(x, y)] + [(x', y')] = [(x + x', y + y')]$. Il est immédiat que l'élément neutre pour cette opération est donné pour la classe $[(x, x)]$ pour tout x, cela implique que $-[(x, y)] = [(y, x)]$. C'est pourquoi un élément $[(x, y)]$ est souvetn noté par $[x] - [y]$. Pour finir avec le groupe $G(M)$, il satisfait la propriété universelle suivante : Si G est un groupe (abélien) quelconque et $\varphi : M \to G$ un morphisme de monoïdes, alors il existe un unique morphisme de groupes $\widetilde{\varphi} : G(M) \to G$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G(M) \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & G, \end{tikzcd}$$

où $i : M \to G(M)$ est le morphisme canonique de monoïdes $i(x) = [x]$.

Soit $\mathscr{E}$ un A-module (à droite). On rappelle que $\mathscr{E}$ est projectif de type fini s'il existe un autre A-module $\mathscr{E}'$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}' \cong A^n.$$

Le module $\mathscr{E}'$ est appelé un complementaire de $\mathscr{E}$. Notons par $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de A-modules projectifs de type fini. Le module somme de deux modules projectifs de type fini est encore un module de ce type. On peut donc penser au monoïde $(\mathscr{P}(A), \oplus)$. Le groupe $K_0(A)$ est par définition le groupe de Grothendieck associé à ce monoïde, c'est à dire, on a

$$K_0(A) := G(\mathscr{P}(A), \oplus).$$

La correspondance qui à chaque algèbre unifère associe le groupe K_0 est fonctorielle : Soit $\theta : A \to B$ un morphisme d'algèbres unifères. On peut munir B, via θ, d'une structure de A-module à gauche. Ceci nos permet de considérer le pushout $\theta_* : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ qui à un A-module (à droite) $\mathscr{E}$ associe le $B-$module (à droite aussi) $\mathscr{E} \otimes_A B$. Or, θ_* est un morphisme de monoides et il définit, grâce à la propriété universelle des groupes de Grothendieck, un morphisme de groupes $\theta_* : K_0(A) \to K_0(B)$. Il se vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un foncteur de la categorie d'algèbres unifères en la categorie de groupes abéliens. En fait, ce foncteur peut se prolonger aux algèbres non necesairement unifères, mais avant de passer à ce point, on verra une autre déscription du groupe K_0 qui est souvent plus pratique.

Soit $\mathscr{E}$ un A-module projectif de type fini avec complementaire $\mathscr{E}'$, dissons $\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}' \cong A^n$. Considérons la projection $p : A^n \to A^n$ dans la première coordonnée, alors $\mathscr{E} = pA^n$. Inversement, si $q \in M_m(A)$ est un idempotent, on a que qA^m est un A-module projectif de type fini. En fait, si $p \in M_n(A)$ et $q \in M_m(A)$ sont des idempotents dans les algèbres de matrices correspondantes. Les A-modules pA^n et qA^m sont isomorphes si et seulement si, il existe $k \geq n, m$ et $u \in GL_k(A)$ tel que

$$p \oplus 0_{k-n} = u(q \oplus 0_{k-m})u^{-1}.$$

Ceci permet de redéfinir le groupe $K_0(A)$ en termes des idempotents (voir par exemple [**Ros94**] Lemme 1.2.1.). En effet, pour $p, q \in M_\infty(A)$ des idempotents, on peut définir une rélation de équivalence donnée par $GL_\infty(A)$ comme dans le lemme. Or, l'ensemble de classes d'équivalences des idempotents, dissons $P(A)$, forme un monoide avec la somme diagonale $p \oplus q$. Maintenant, l'affirmation précédente permet de conclure que le groupe $K_0(A)$ coincide avec le groupe de Grothendieck de $(P(A), \oplus)$, autrement dit, on a

$$K_0(A) = \{[p] - [q] : p, q \in P(A)\}.$$

Une propriété fondamentale de la K-théorie des algèbres est l'existence d'un produit : Soient A, B deux algèbres, il existe un morphisme de groupes

$$K_0(A) \otimes K_0(B) \to K_0(A \otimes B)$$

donné par le produit tensoriel des modules

$$(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \mapsto \mathscr{E} \otimes \mathscr{F}.$$

Une propriété fondamentale de ce produit est qu'il est compatible avec les morphismes d'algèbres (naturalité du produit) : Soient $\theta^0 : A \to A'$

et $\theta^1 : B \to B'$ deux morphismes d'algèbres (unifères), alors on a le diagramme commutatif suivant.

(28)
$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \otimes K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\theta^0_* \otimes \theta^1_*"'] & K_0(A \otimes B) \arrow[d, "(\theta^0 \otimes \theta^1)_*"] \\
K_0(A') \otimes K_0(B') \arrow[r] & K_0(A' \otimes B').
\end{tikzcd}$$

On veut définir le groupe de K-théorie pour une algèbre non unifère aussi. Soit A une algèbre (non necesairement unifère), on va introduire l'unitarisation de A. On pose $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$. On muni $\tilde{A}$ du produit suivant

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (a \cdot b + \mu \cdot a + \lambda \cdot b, \lambda \cdot \mu).$$

On va utiliser la notation $(a, \lambda) := a + \lambda$ pour les éléments $\tilde{A}$. On vérifie facilement que $\tilde{A}$ devient ainsi une algèbre associative unifère, avec $1_{\tilde{A}} = 0 + 1_{\mathbb{C}}$. L'algèbre A s'identifie canoniquement avec $A \oplus 0$ de manière que A est un idéal bilatère de $\tilde{A}$ et $\tilde{A}/A \cong \mathbb{C}$. Autrement dit on a une suite exacte courte

$$0 \to A \to \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \to 0.$$

On peut à present définir le groupe K_0 pour des algèbres non unifères.

Définition 1.1.1. Soit A une algèbre (non necesairement unifère). On définit le groupe $K_0(A)$ comme le noyau du morphisme $K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}$.

La première remarque est que si A est unifère et on l'applique le processus d'unitarisation, alors les deux définitions de K_0 coincident.

Considérons une suite exacte courte d'algèbres (non necesairement unifères)

(29)
$$0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} C \to 0.$$

En applicant la K-théorie à une telle suite on obtient une suite exacte de groupes

(30)
$$K_0(I) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{p_*} K_0(C).$$

Le foncteur K_0 n'est pas exacte, c'est à dire, dans la suite en K-théorie ci-dessus le morphisme i_* (resp. p_*) n'est pas forcement injectif (resp. surjectif). Cependant, s'il existe un morphisme $s : C \to A$ avec $p \circ s = id_C$, dans ce cas on dit que la suite est scindée avec scindage s, alors la suite (30) prend la forme

(31)
$$0 \to K_0(I) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{p_*} K_0(C) \to 0.$$

Ces suites sont très utiles pour calculer de groupes de K-théorie. En effet, on va calculer à present la K-théorie de certains algèbres, celles appelées locales.

Définition 1.1.2. Soit B une algèbre unifère. On dit que B est une algèbre locale si l'ensemble de ses éléments non-inversibles constitue un idéal biltère propre.

Une autre manière de caracteriser une algèbre locale est la suivante : Une algèbre est locale si et seulement si elle possède un seul idéal maximal à gauche, un seul idéal maximal à droite, et ceux-ci coincident (Proposition 1.3.4 en [**Ros94**]).
Le résultat suivant calcule le K_0 d'une algèbre locale (Théorème 1.3.11 en [**Ros94**]).

Théorème 1.1.3. *Soit B une algèbre locale. Tout B-module projectif fini de type fini est libre avec un rang uniquement défini. En particulier*

$$K_0(B) \cong \mathbb{Z}$$

avec générateur la classe d'isomorphisme du module libre de rang 1, [R].

Dans le résultat suivant on calcule grâce au théorème précedent le groupe K_0 des algèbres nilpotentes. On utilisera ce fait dans le chapitre 6.

Proposition 1.1.4. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et A une algèbre $N-$nilpotent, c'est à dire, $a_1 \cdots a_N = 0, \forall a_i \in A$. Alors, on a que le groupe de K-théorie $K_0(A)$ est le groupe trivial d'un seul élément.*

Démonstration. Soit $B = \tilde{A}$ l'unitarisation de A. On va montrer que B est une algèbre locale à seul idéal maximal A.
Dénotons par U l'ensemble des unités de B. On veut voir que $A = B \setminus U$: l'inclusion $A \subset B \setminus U$ est trivial parce que A est un idéal bilatère de B. Reciproquement, soit $u = a + \mu \in B \setminus A$, alors $\mu \neq 0$. On va donner explicitement l'inverse de cet élément. On peut supposer sans perte de généralite que $\mu = 1$. Posons

$$v = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j a^j.$$

Il s'est vérifie immédiatement à la main que $uv = vu1$ puisque $a^N = 0$ par hypothèse.

Maintenant on peut calculer la K-théorie de A. Considérons la suite exacte scindée

$$0 \to A \to B \to \mathbb{C} \to 0.$$

Cette dernière suite induit la suite exacte suivante

$$0 \to K_0(A) \to K_0(B) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Or, B est une algèbre locale d'après ce que l'on vient de voir. Maintenant, la déscripition de $K_0(B)$ donné par le théorème 1.1.3 permet de voir immédiatement que le morphisme $K_0(B) \to \mathbb{Z}$ qui apparait dans la dernière suite exacte ci-dessus, n'est rien d'autre que l'idéntité (dans tout cas un isomorphisme). On en déduit que $K_0(A) = 0$. $\square$

1.1.1. K-théorie relative. Soit A une algèbre unifère et $I \subset A$ un idéal bilatère non trivial ($0 \neq I \neq A$). On va définir dans cette section un groupe $K(A, I)$ de $K-$théorie rélative. On va justifier la terminologie en montrant que $K(A, I) \cong K_0(I)$.

DÉFINITION 1.1.5. Un quasi-isomorphisme sur (A, I) est un triplet $\sigma = (E, F, \sigma)$ où E, F sont des A-modules projectifs de type fini et

$$\sigma : \pi_* E \to \pi_* F$$

est un isomorphisme de $A/I-$modules. On dira que un quasi-isomorphisme (quasi-isomorphisme) $\sigma = (E, F, \sigma)$ est dégénéré s'il existe un isomorphisme $T : E \to F$ tel que $\pi_*(T) = \sigma$.

Le groupe que l'on se propose de définir aura comme éléments des quasi-isomorphismes modulo certaine rélation d'équivalence. Avant de définir la rélation d'équivalence qu'il nous faut, on remarque que l'on peut définir la somme de deux quasi-isomorphismes de manière très naturelle de la facon suivante. Soient (E_i, F_i, σ_i) deux q.i avec $i = 0, 1$. on pose $\sigma_0 \oplus \sigma_1$ le quasi-iso donné par

$$(E_0 \oplus E_1, F_0 \oplus F_1, \sigma_0 \oplus \sigma_1).$$

Maintenant, pour définir la rélation d'équivalence on commence par introduire la notion d'isomorphisme entre quasi-isomorphismes. Soient $\sigma = (E, F, \sigma)$ et $\sigma = (E', F', \sigma')$ deux quasi-isomorphismes, on dira que σ et isomorphe à σ', $\sigma \cong \sigma'$, s'il'existe des isomorphismes $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$ tels que le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} \pi_* E \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi_* f"'] & \pi_* F \arrow[d, "\pi_* g"] \\ \pi_* E' \arrow[r, "\sigma'"'] & \pi_* F' \end{tikzcd}$$

On pose $\sigma \sim \sigma'$ ssi ils existent des quasi-isomorphismes τ et τ' dégénérés tel que $\sigma \oplus \tau \cong \sigma' \oplus \tau'$. On note par $K(A, I)$ l'ensemble de classes d'équivalence des quasi-isos avec la rélation $\sim$.

La première remarque est que la somme des quasi-isomorphisme est bien définie sur $K(A, I)$ puisque la somme de deux quasi-isomorphismes dégénérés est clairement un quasi-isomorphisme dégénéré. En fait, on a la proposition suivante.

Proposition 1.1.6. $(K(A,I),\oplus)$ *est un groupe abélien.*

Démonstration. Le fait que l'opération $\oplus$ est commutative et associative est immédiat. En fait, le seul point délicat est de voir l'existence d'un inverse parce que clairement la classe des quasi-isomorphismes dégénérés est un élément neutre pour cette opération.

Soit $[E,F,\sigma] \in K(A,I)$. On va voir que $(E,F,\sigma)\oplus(F,E,\sigma^{-1})$ est dégénérée. Soient $D : E \to F$ et $Q : F \to E$ des morphismes avec $\pi_*(D) = \sigma$ et $\pi_*(Q) = \sigma^{-1}$. Posons

$$T = \begin{pmatrix} (1-DQ)D + D & DQ-1 \\ 1-QD & Q \end{pmatrix},$$

alors $T : E \oplus F \to F \oplus E$ est un morphisme avec $\pi_(\sigma \oplus \sigma^{-1})$ et il est inversible avec inverse donnée explicitement par

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} Q & 1-QD \\ DQ-1 & (1-DQ)D + D \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $-[E,F,\sigma] = [F,E,\sigma^{-1}]$. On conclut ainsi la preuve. $\square$

Exemple 1.1.7. *Un exemple d'un élément en $K(A,I)$ est donné par un élémént inversible de A modulo I. En effet, soit $P \in A$ tel que il existe $Q \in A$ avec $PQ - 1 \in I$ et $PD - 1 \in I$, alors $(A,A,\pi(P))$ est un quasi-isomorphisme sur (A,I), où $\pi(P)$ est la multiplication par la classe de P en A/I.*

Avant de relier la K-théorie rélative et la K-théorie usuelle, on va voir quelques propriétés et constructions de cette théorie.

Soient (A,I) et (B,J) deux couples comme ci-dessus. Un morphisme de couples, $\theta : (A,I) \to (B,J)$, est un morphisme d'algèbres uniféres $\theta : A \to B$ tel que $\theta(I) \subset J$. Définissons à présent un morphisme associé $\theta_* : K(A,I) \to K(B,J)$ de la facon suivante : Soit $[E,F,\sigma] \in K(A,I)$, on pose $\theta_*([E,F,\sigma]) := [\theta_*(E), \theta_*(F), \bar{\theta}_*(\sigma)]$, où $\bar{\theta} : A/I \to B/J$ est le morphisme induit par θ. En fait, on peut vérifier que l'on a un foncteur de la catégorie des couples en la catégorie des groupes abéliens. On va lier ce fonteur à la K-théorie usuelle.

Il existe un morphisme naturel $j : K(A,I) \to K_0(A)$ défini par $j([E,F,\sigma]) = [E] - [F]$. Il s'agit d'un morphisme de groupes.

On va voir à present que $K(A,I) \cong K_0(I)$. La raison d'avoir introduit la K-théorie relative est-ce qu'il y a des éléments de $K_0(I)$ qui se décrivent mieux avec la déscription de quasi-isomorphismes.

Posons $D(A,I) := \{(a,a') \in A \times A : a - a' \in I\}$, cela est une algèbre unifère avec les opérations en chaque coordonnée. En plus, cette algèbre est le tiré en arrière de la projection $\pi : A \to A/I$, c'est à dire, on a un diagramme commutatif de morphismes d'algèbres

$$\begin{tikzcd} D(A,I) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r, "\pi"'] & A/I, \end{tikzcd}$$

où p_j, $j = 1, 2$ sont les projections respectives. Posons

$$K'(A,I) := Ker\{K_0(D(A,I)) \overset{(p_1)_*}{\to} K_0(A).\}$$

Il est simple de vérifier à la main que $K'(A,I) \cong K_0(I)$. On peut trouver une preuve élémentaire dans [**Ros94**], théorème 1.5.9.. On peut l'en déduire immédiatement du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & D(A,I) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où les deux lignes sont des suite exactes scindées d'algèbres.

Maintenant, on va définir un isomorphisme explicite entre $K(A,I)$ et $K'(A,I)$. Soit (E,F,σ) un quasi-iso sur (A,I). Posons

$$M(E,F,\sigma) := \{(e,f) \in E \times F : (\sigma\pi)_*(e) = \pi_*(f)\}),$$

où $(\sigma\pi)_* : E \to \pi_*(F)$ est donné par $(\sigma\pi)_*(e) = \sigma(e \otimes 1)$ et $\pi_* : F \to \pi_*(F)$ est donné par $\pi_*(f) = f \otimes 1$. Avec les produits coordonnée à coordonnée, on a que $M = M(E,F,\sigma)$ est un $D(A,I)-$module projectif de type fini ([**Mil71**], thm. 2.1). Encore plus, tout $D(A,I)-$module projectif de type fini est de cette forme ([**Mil71**], thm. 2.2) et $(p_1)_*(M) \cong E$ et $(p_2)_*(M) \cong F$ où les p_j, $j = 1, 2$ notent les projections en les coordonnées respectives ([**Mil71**], thm. 2.3). On peut naturellement définir un morphisme $\alpha : K(A,I) \to K'(A,I)$ par la formule

$$\alpha([E, F\sigma]) = [M(E,F,\sigma)] - [M(E,E,id)].$$

Maintenant, soit $x = [M(E,F,\sigma)] - [M(E',F',\sigma')] \in K'(A,I)$. La prémière observation est que par définition de $K'(A,I)$, on peut supposer $E = E'$. On définit $\beta : K'(A,I) \to K(A,I)$ par

$$\beta(x) = [E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1}].$$

Le fait que $\beta \circ \alpha = id_{K(A,I)}$ est immédiat, en effet, on

$$(\beta \circ \alpha)([E,F,\sigma]) = [E \oplus E, F \oplus E, \sigma \oplus id] = [E,F,\sigma].$$

De l'autre coté, soit $x = [M(E,F,\sigma)] - [M(E,F',\sigma')] \in K'(A,I)$, alors

$$(\alpha \circ \beta)(x) = [M(E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1})] - [M(E \oplus F', E \oplus F', id)].$$

Or, du fait que $(\sigma')^{-1} \oplus \sigma'$ se réleve en un isomorphisme (comme dans la preuve de la proposition 1.1.6) on voit que

$$M(E \oplus F', F \oplus E, \sigma \oplus (\sigma')^{-1}) \oplus M(E, F', \sigma') \cong M(E, F, \sigma) \oplus M(E \oplus F', E \oplus F', id).$$

Autrement dit, $(\alpha \circ \beta)(x) = x$. On conclut que $K(A, I) \cong K_0(I)$.

Exemple 1.1.8. *Soit $(A, A, \pi(P))$ le quasi-isomorphisme sur (A, I) de l'exemple 1.1.7. Il est facile de vérifier que l'élément en $K_0(I)$ qui lui correspond est*

$$[TeT^{-1}] - [e],$$

où T et T^{-1} sont les matrices de la proposition 1.1.6 et

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où 1 est l'unité de $\widetilde{I}$.

Un des avantages de voir le groupe $K_0(I)$ comme un groupe de K-théorie relative est que ce point de vue permet de généraliser très facilement le produit en K-théorie pour des algèbres non nécessairement unifères. Autrement dit, dans le cas non unifère on a aussi un produit

$$K_0(I) \otimes K_0(J) \to K_0(I \otimes J)$$

qui coïncide avec le produit défini ci-dessus lorsque les algèbres sont unifères et qui est compatible (naturel) par rapport au morphismes d'algèbres.

1.1.2. K-théorie topologique.

K-théorie des C^*-algèbres. Soit A une algèbre. On va considérer le cas lorsque A est une C^*-algèbre (ou de Banach). Dans ce cas, $K_0(A)$ admet une description topologique : Soit $p \in M_\infty(A)$, on dit que p est un projecteur de A si $p^* = p = p^2$. Prenons p_0, p_1 deux projecteurs, on dit que $p_0 \sim_h p_1$ (p_0 homotopique à p_1) s'il existe une application continue $p : [0, 1] \to M_\infty(A)$ avec $p(t)$ un projecteur pour tout t, et $p(0) = p_0$, $p(1) = p_1$, où $M_\infty(A)$ a la topologie limite inductive induite par les inclusions

$$M_n(A) \hookrightarrow M_{n+1}(A) : M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des projecteurs de A. Si l'on note par $P(A)$ l'ensemble de classes d'équivalences, alors on a que $(P(A), \oplus)$ (avec $\oplus$ somme diagonale) est un monoïde dont le groupe de Grothendieck est $K_0(A)$.

Comme pour le cas purement algébrique, nous n'utiliserons ici que le groupe K_0. Notons cependant que les groupes "supérieurs" $(K_n, n \in \mathbb{N})$ sont bien plus faciles à définir dans le cadre banachique que dans le cadre purement algébrique : On pose $K_n(A) := K_0(C_0(\mathbb{R}^n, A))$. On envoie à

[**Ros94**], [**Mil71**], [**CMR07**] pour un développement de ces groupes dans le cadre algébrique. On liste à présent quelques propriétés fondamentales de la K-théorie des C^*-algèbres.

(i) Invariance par homotopie : Si $\varphi, \psi : A \to B$ sont deux morphismes homotopiques, alors $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$. En particulier, les morphismes induits par les évaluations

$$K_0(A[0,1]) \xrightarrow{e_t} K_0(A)$$

définissent tous des isomorphismes. Une autre consequence triviale est le fait que le groupe K_0 est nul pour toute algèbre contractile.

(ii) Périodicité de Bott : Il existe un élément $\beta \in K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ tel que le morphisme

$$K_0(A) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta} K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \tag{32}$$

est un isomorphisme. L'élément β est appelé l'élément de Bott et peut être décrit explicitement par

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1+x}{2} & \frac{y+i\cdot z}{2} \\ \frac{y-i\cdot z}{2} & \frac{1-x}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in K_0(\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)})$$

où (x, y, z) sont des coordonnées de la sphere S^2, on rappel que $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^2)} = C(S^2)$.

(iii) Suite exacte à six termes : Pour toute suite exacte courte

$$0 \to I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \to 0$$

il existe une suite exacte à six termes de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\ K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I). \arrow[l, "K_1(\varphi)"] \end{tikzcd} \tag{33}$$

Dans le point (iii) ci-dessus, les morphismes δ_0 et δ_1 sont appelés des morphismes de bord. En fait, à partir d'un élément en $GL_\infty(B)$ on obtient un élément de $K_0(I)$ de façon très similaire à l'exemple 1.1.8. Maintenant, le fait que cette association passe au $K_1(B)$ est une question de la définition de la relation d'équivalence sur $GL_\infty(B)$ que l'on impose. La différence entre la K-théorie algébrique et topologique commence justement ici (dans le cas algébrique on a aussi une application du type δ_1). Or, le cas de δ_0 est particulier pour les C^*-algèbres (ou de Banach), en effet, δ_0 est une application comme δ_1 mais où on utilise en plus la périodicité de Bott.

Remarque 1.1.9. Si A est juste une algèbre localement convexe (ou de Fréchet), aucune des propriétés ci-dessus n'est satisfaite en général. En fait, les algèbres que l'on étudiera dans cette thèse ne sont pas en général des C^*-algèbres ou de *Banach*, ce qui nous forcera à trouver d'autres méthodes d'étude.

On finit cette section par un mot sur la stabilité par calcul fonctionnel holomorphe. Soit A une C^*- algèbre et $\mathscr{A} \subset A$ une sous-algèbre dense.

Considérons l'inclusion $\mathscr{A} \hookrightarrow A$, elle induit un morphisme

$$K_0(\mathscr{A}) \xrightarrow{i} K_0(A).$$

Ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme. Un critère suffisante pour que i soit un isomorphisme est que $\mathscr{A}$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans A. C'est à dire, que si $a \in \mathscr{A}$ et f est une fonction holomorphe (avec $f(0) = 0$ si A n'a pas d'unité) dans un voisinage du spectre de a (dans A), alors $f(a) \in \mathscr{A}$. Un exemple de cette situation est le suivante : Soit X une variété C^∞, alors $C_c^\infty(X)$ est une sous-algèbre stable sous calcul fonctionnel holomorphe dans $C_0(X)$. En particulier, comme on verra en bas, cela implique que tout fibré vectoriel au-dessus de X est isomorphe à un fibré vectoriel lisse.

K-théorie des espaces. Soit X un espace topologique compact. Grâce au théorème de Serre-Swan il possible de voir que $K^0(X) := K_0(C(X))$ est le groupe de Grothendieck associé au monoïde des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de X avec la somme de Whitney.

Soit X un espace localement compact. Il est possible de voir que $K^0(X) := K_0(C_0(X))$ peut être décrit comme un ensemble de triplets (E, F, σ) modulo une relation d'équivalence (voir [**AS68a**] par exemple), où E, F sont des fibrés vectoriels au-dessus de X est $\sigma : E \to F$ est un isomorphisme en dehors d'un compact de X. On utilisera cette description au cours de ce travail.

La périodicité de Bott dans ce cadre se traduit par le fait que $K^0(X) \cong K^0(X \times \mathbb{R}^2)$. En fait, l'élément de Bott, $\beta \in K^0(\mathbb{R}^2)$ est donné par le fibré canonique en droites au-dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$. On finit cette section en énonçant un cas plus général de la périodicité de Bott, il s'agit de l'isomorphisme de Thom :

Soit $V \to X$ un fibré vectoriel complexe au-dessus d'un espace localement compact. Alors, $K^0(V) \cong K^0(X)$, où l'isomorphisme est donné par la multiplication d'un élément $u_V \in K^0(V)$, appelé l'élément de Thom (lequel est bien défini uniquement quand X est compact, mais la multiplication est toujours bien définie). On appelle l'application

$$K^0(X) \overset{Thom}{\longrightarrow} K^0(V) : x \mapsto x \cdot u_V$$

l'isomorphisme de Thom.

1.2. Indices analytiques et théorèmes de l'indice

Le but de la théorie de l'indice est grosso modo d'obtenir des invariants géométriques des "espaces" à partir des données analytiques. Classiquement on utilise les opérateurs appelés pseudodifférentiels et leurs indices. Or, pour les propos de cette thèse, la K-théorie nous permettra de laisser de côté tous les détails techniques de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels. De plus, avec l'usage des groupoïdes de Lie, comme on verra dans le chapitre suivant, on peut dans la plupart des cas, oublier ces opérateurs. Cependant, on aura besoin de quelques termes que l'on introduit très brièvement à présent.

Soit M une variété de classe C^∞ de dimension m. Soient E, F des fibrés vectoriels au-dessus de M. Un opérateur différentiel sur M (d'ordre k) est une transformation linéaire $D : C_c^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ qui en coordonnées locales s'écrit comme

$$D = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

où $a_\alpha(x)$ est une matrice de fonctions C^∞ à valeurs complexes avec $a_\alpha(x) \neq 0$ pour un certain $|\alpha| = k$. Soit $\pi : T^*M \to M$ la projection. Le symbole principal $\sigma(D)$ de D est la section du fibré $Hom(\pi^*E, \pi^*F)$ au-dessus de T^*M qui est définie de la manière suivante : Dans la description locale utilisé ci-dessus, en la fibre de (x, ξ), le symbole principal est donné par la multiplication par

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

où $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_m^{\alpha_m}$. L'opérateur D est appelé elliptique si $\sigma(D)(x, \xi) : E_x \to F_x$ est inversible en dehors de la section nulle de T^*M.

Avec la description de la $K-$théorie topologique donnée ci-dessus, il est clair que l'application $D \mapsto \sigma(D)$ définit une application de l'ensemble d'opérateurs différentiel dans $K^0(T^*M)$.

Or, la classe des opérateurs différentiels est un peu restreinte. Beaucoup de constructions que l'on aimerait bien appliquer aux opérateurs différentiels sortent de cette classe. On est menés ainsi à utiliser les opérateurs pseudodifférentiels. Ceux-ci sont des généralisations des opérateurs différentiels. On peut également parler de symboles principales pour ces opérateurs et prolonger de la même manière la notion d'elliptique. En fait, si $Ell(M)$

dénote l'ensemble d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques sur M, alors l'application $D \mapsto [\sigma(D)]$ épuise le groupe $K^0(T^*M)$, c'est à dire,

$$Ell(M) \stackrel{symb.}{\longrightarrow} K^0(T^*M)$$

est une application surjective.

De plus, un opérateur différentiel D sur M est elliptique, si et seulement si, il existe un opérateur pseudodifférentiel Q sur M tel que $DQ - 1$ et $QD - 1$ sont des opérateurs régularisants. Ces opérateurs sont ceux qui sont à noyau dans $C_c^\infty(M \times M)$. À partir de cette propriété on sait que D a un kernel de dimension fini, également pour son cokernel. Cette propriété est connue sous le nom de condition de Fredholm. On peut donc définir l'indice de Fredholm associé, c'est à dire,

$$Ind\, D = dim\, Ker\, D - dim\, Coker\, D \in \mathbb{Z}.$$

Ce nombre entier est appélé l'indice analytique de D. Une remarque importante est que le groupe de K-théorie K_0, de l'algèbre des opérateurs à noyau dans $C_c^\infty(M \times M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et sous cette identification l'élément dans $K_0(C_c^\infty(M \times M))$ défini par le quasi-isomorphisme induit par D (comme dans l'exemple 1.1.7) coïncide avec l'indice de Fredholm défini ci-dessus. Grâce aux propriétés des opérateurs de Fredholm on montre que l'application $D \mapsto ind\, D$ se factorise à travers le symbole principal. Autrement dit, il existe un morphisme de groupes $ind_{a,M} : K^0(T^*M) \to \mathbb{Z}$, appélé l'indice analytique de M, tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Ell(M) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & \mathbb{Z} \\ K^0(T^*M) \arrow[ur, "ind_{a,M}"'] & \end{tikzcd} .$$

Cette propriéte est fondamentale pour pouvoir faire la théorie de l'indice classique. On va énoncer à présent le résultat fondamental de la théorie. Il s'agit du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

Théorème de Atiyah-Singer. Le théorème de l'indice de Atiyah et Singer est le point de départ de la théorie de l'indice. En effet, ils ont montré que l'indice analytique d'un opérateur pseudodifférentiel elliptique sur une variété compacte peut être calculé de manière purement topologique. Le théorème de l'indice généralise des résultats classiques comme les théorèmes de Gauss-Bonnet, Hodge, Riemman-Roch topologique entre autres, mais il a surtout ouvert la voie pour trouver de nouveaux invariants.

On introduit l'indice topologique d'une variété compacte M :

Considérons un plongement de M dans un espace euclidien $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Ensuite, on peut prendre le fibré normal à M dans $\mathbb{R}^n$, notons le par N. Le fibré $TN \to TM$ a une structure de fibré vectoriel complexe, et donc on a l'isomorphisme de Thom

$$K^0(TM) \xrightarrow{T} K^0(TN).$$

D'une autre part, N s'idéntifie à un voisinage ouvert de M dans $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de voir aussi TN comme sous-ensemble ouvert de $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. On a ainsi un autre morphisme en K-théorie

$$K^0(TN) \xrightarrow{i} K^0(T\mathbb{R}^n).$$

Finalement, on a l'inverse du morphisme de Bott :

$$K^0(T\mathbb{R}^n) = K^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{B} K^0(\{pt\}) \cong \mathbb{Z}.$$

L'indice topologique de M est le morphisme

$$K^0(T^*M) \stackrel{ind_{t,M}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}$$

donné par la composition suivante

$$K^0(TM) \stackrel{T}{\to} K^0(TN) \stackrel{i}{\to} K^0(T\mathbb{R}^n) \stackrel{B}{\to} \mathbb{Z}.$$

On peut maintenant énoncer le théorème.

Théorème 1.2.1 (Atiyah-Singer). *Soit M une variété compacte, alors $ind_{a,M} = ind_{t,M}$.*

L'importance du théorème se remarque du fait que l'indice topologique peut être explicitement calculé en termes de classes caractéristiques associés à la variété. En effet, dans [**AS68b**] Atiyah-Singer montrent que pour un opérateur pseudodifférentiel elliptique P on a la formule suivante :

$$ind_{t,M}([\sigma_P]) = \int_{TM} ch([\sigma_P])Td(M), \tag{34}$$

où $ch : K^0(TM) \to H^*(TM)$ est le caractère de Chern et $Td(M)$ est une classe caractéristique de la variété M.

1.3. Cohomologie cyclique et accouplements avec la K-théorie

Le but de cette section est de rappeller les éléments de base de la cohomologie cyclique. Cette théorie peut être considérée comme une généralisation de la théorie de De Rham pour des variétés C^∞, on verra cela plus bas.

Définition 1.3.1. Une algèbre différentielle graduée est une paire (Ω, d) où $\Omega = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n$ est une algèbre graduée et où $d : \Omega \to \Omega$ est une différentielle de dégrée 1, et de courbure 0, c'est à dire, d est linéaire avec $d^2 = 0$, $d : \Omega^n \to \Omega^{n+1}$ et elle satisfait

$$d(\omega_i \cdot \omega_j) = d(\omega_i)\omega_j + (-1)^i \omega_i d\omega_j \ \text{(Leibnitz)}.$$

L'exemple de base d'une algèbre differentielle graduée est l'algèbre des formes differentielles sur une variété C^∞, $\Omega(M)$, avec la differentielle de De Rham.

Soit A une $\mathbf{C}$-algébre. On va définir l'algèbre differentielle graduée des formes differentielles non commutatives associée à A. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\Omega^n(A) := \tilde{A} \otimes \bigotimes_1^n A,$$

où $\tilde{A}$ est l'unitarisation de A (on le fait même dans le cas où A est déjà unifère). L'espace $\Omega^n(A)$ est un A-module à droite avec l'action naturelle, cependant on va définir une autre action : Soit $\tilde{a_0} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in \Omega^n(A)$ et $a_{n+1} \in A$, on définit

$$(35)\quad \tilde{a_0} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \cdot a_{n+1} := \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \tilde{a_0} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

Cette action à (droite) de A sur $\Omega^n(A)$ se prolonge de façon évidente à une action de $\tilde{A}$, i.e., à un produit $\Omega^n(A) \times \tilde{A} \to \Omega^n(A)$. On utilise cette action pour définir

$$\Omega^n(A) \times \Omega^m(A) \to \Omega^{n+m}(A).$$

Soit $\omega_n \in \Omega^n(A)$ et $\tilde{b_0} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m \in \Omega^m(A)$, on pose

$$\omega_n \cdot \tilde{b_0} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m := (\omega_n \cdot \tilde{b_0} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m).$$

On a une algèbre graduée $\Omega(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n(A)$. On peut définir une différentielle $\Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ de la manière suivante

$$d(\tilde{a_0} \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

et obtenir ainsi une algèbre différentielle graduée $(\Omega(A), d)$. Les formules précédents semblent un peu artificielles, il y a une autre manière de présenter l'algèbre $\Omega(A)$ qui résulte plus intuitive et où on voit bien la rélation avec les formes différentielles : on pose $\Omega(A)$ l'algèbre universelle engendrée (comme $\mathbf{C}$-algèbre) par A, avec les rélations de A et des symboles da, avec $a \in A$; et des rélations

$$d(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) = \lambda \cdot da + \mu \cdot db$$
$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db,$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ et $a, b \in A$. Ainsi définie, $\Omega(A)$ admet une graduation par $\mathbf{N}$, le facteur n, $\Omega^n(A)$, est tout simplement des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $a_0 da_1 \cdots da_n$ et $\lambda \cdot da_1 \cdots da_n$. Maintenant il est facile de déduire les formules du produit en utilisant la rélation de Leibnitz : En effet, si on impose

$$da_i \cdot a_{i+1} = d(a_i a_{i+1}) - a_i da_{i+1},$$

on voit donc comme obtenir, par un argument de recurrence, la formule (35) avec la notation différentielle :

$$a_0 da_1 \cdots da_n \cdot a_{n+1} = (-1)^n a_0 a_1 da_2 \cdots da_n da_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} a_0 da_1 \cdots d(a_j a_{j+1}) \cdots da_{n+1}.$$

L'algèbre $\Omega(A)$ est universelle dans le sens suivant : Soit (Ω, d) une algèbre différentielle graduée. Supposons que l'on a une morphisme d'algèbres $\rho : A \to \Omega^0$, alors il existe un unique morphisme d'algèbres différentielles graduées $\delta : \Omega(A) \to \Omega$ tel que on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & \Omega \\ & \Omega(A). \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

En effet, on peut définir $\delta(a_0 da_1 \cdots da_n) = \rho(a_0) d\rho(a_1) \cdots d\rho(a_n)$.

Définition 1.3.2. Un cycle de dimension n sur A est un triplet $(\Omega, \rho, \int)$ où

1. (Ω, d) est une algèbre différentielle graduée,
2. $\rho : A \to \Omega^0$ est un morphisme d'algèbres et
3. $\int : \Omega^n \to \mathbf{C}$ est une trace graduée fermée, c'est à dire,
   (trace graduée) :$\forall \omega_i \in \Omega^i, \omega_j \in \Omega^j$ avec $i+j=n$, $\int \omega_i \omega_j = (-1)^{ij} \int \omega_j \omega_i$ et
   (férmée) :$\forall \omega \in \Omega^{n-1}$, $\int d\omega = 0$.

étant donné un cycle de dimension n, $(\Omega, \rho, \int)$ on définit son caractère comme l'application linéaire

$$\tau_\Omega : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n+1-fois} \to \mathbf{C}$$

donnée par

$$\tau_\Omega(a_0, ..., a_n) = \int \rho(a_0) d\rho(a_1) \cdots d\rho(a_n).$$

Exemple 1.3.3. *Soit M une variété fermé C^∞. Soit $C : \Omega^n(M) \to \mathbf{C}$ un courant fermé de dégré n. Alors $(\Omega(M), Id, C)$ est un cycle de dimension n sur $C^\infty(M)$. Son caractère est donné par*

$$\tau_C(f_0, \cdots f_n) = C(f_0 df_1 \cdot \cdot df_n).$$

Le théorème suivant, bien que de preuve élémentaire, est très profond. Il nous permettra de donner des examples précis de cocycles cycliques, et il permet en générale de comprendre la théorie cyclique comme une généralisation de la théorie de De Rham.

THÉORÈME 1.3.4. *[Connes] Soit* $\tau : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n+1-fois} \to \mathbf{C}$ *une application linéaire. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) Il existe une trace graduée férmée $\tilde{\tau} : \Omega^n(A) \to \mathbf{C}$ *telle que*

$$\tilde{\tau}(a_0 da_1 \cdots da_n) = \tau(a_0, \cdots, a_n).$$

(b) Il existe un cycle de dimension n *sur* A *de caractère* τ*, c'est à dire,* $\tau = \tau_\Omega$.

(c) τ *satifait les deux propriétés suivantes :*

· τ *est cyclique :*

$$\tau(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \cdots, a_{n-1})$$

· τ *est un cocycle : Si* $b\tau : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n+2-fois} \to \mathbf{C}$ *est l'application multilinéaire définie par*

$$(b\tau)(a_0, ..., a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau(a_0, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a_{n+1} a_0, ..., a_n),$$

alors $b\tau = 0$.

On peut passer à la définition de la cohomologie cyclique. Considérons

$$C^n(A) := \{\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n+1-fois} \to \mathbf{C} : \tau \text{ multilinéaire } \}.$$

L'opération $b\tau$ définie en (c) du théorème correspond à un opérateur

$$b : C^n(A) \to C^{n+1}(A)$$

qui satisfait $b^2 = 0$. Autrement dit, on a un complexe $(C^\cdot(A), b)$ dont la cohomologie (pour le cas A unifére) est la cohomologie de Hochschild de A, notée par $HH^*(A)$. Or, le théorème nous dit que les applications multilinéaires qui sont des caractères d'un cycle, sont précisement celles qui satisfont les deux propriétés de 1.3.4(c). Notons par $C^n_\lambda(A)$ le sous-espace de $C^n(A)$ des applications $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\tau(a_0, \cdots, a_n) = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \cdots, a_{n-1}).$$

Connes a montré que l'opérateur b se restreint à cette sous-espace, i.e.,

$$b : C^n_\lambda(A) \to C^{n+1}_\lambda(A),$$

ce qui nous permet de considèrer la cohomologie du complexe obtenu. On appelle cohomologie cyclique de A, la cohomologie du complexe $(C^{\cdot}_{\lambda}(A), b)$. On la note par $HC^*(A)$.

Remarque 1.3.5. Même si $(C^{\cdot}_{\lambda}(A), b)$ est un sous-complexe de $(C^{\cdot}(A), b)$, on n'a pas une injection au niveau des cohomologies. L'exemple pour cela est donné par $A = \mathbf{C}$, en effet

$$HC^k(\mathbf{C}) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } k = 2n \\ 0 & \text{si } k = 2n+1, \end{cases}$$

tandis que

$$HH^k(\mathbf{C}) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Neanmoins, l'inclusion de sous-complexes induit toujours un morphisme entre cohomologies

$$HC^*(A) \xrightarrow{I} HH^*(A). \tag{36}$$

On n'a pas parlé, jusqu'à maintenant, des algèbres topologiques. Il est intuitif que dans la définition de $C^{\cdot}_{\lambda}(A)$ (où de $C^{\cdot}(A)$) on peut considérer des applications multilinéaires continues. Effectivement, sous cette supposition et en prenant des algébres localement convexes, on a une théorie de cohomologie cyclique topologique. Il est par contre plus délicat de parler de cycles et de l'algèbre différentielle graduée de formes différentielles sur A, bien qu'il est possible, il faut faire attention à la topologie que l'on considère sur les produits tensorials. On en reparlera plus tard lorsque on aura besoin. Pour l'instant tout ce que l'on va dire reste vrai pour le cas topologique.

Grâce au théorème on voit qu'un cycle sur A determine, via son caractère, un élément de $HC^*(A)$ et à l'inverse. En étudiant les propriétés des cocycles bordants (ou cycles cobordants) Connes a été méné à trouver une suite exacte longue qui rélie la cohomologie cyclique à la de Hochschild. Cette suite lui a permis de faire de nombreux calculs explicits des espaces de cohomologie ainsi que de mieux comprendre la théorie cyclique comme une version non commutative de la théorie de De Rham pour de variétés. On va définir les opérateurs jouant dans la suite exacte mentionée, cela nous permettra aussi de parler de cup produit et d'introduire la cohomologie cyclique périodique qui est la théorie qui nous intéresse pour cette thèse.

Commencons par l'opérateur $B : HH^n(A) \to HC^{n-1}(A)$, on va juste donner la définition, pour voir la motivation géométrique on envoie le lecteur à [**Con85, Con94, CST04**] par exemple. L'opérateur B est défini au niveau de $C^n(A)$: D'abord définissons deux opérateurs : l'opérateur d'antysimmetrisation $A : C^n(A) \to C^n_\lambda(A)$ donné par

$$(A\tau)(a_0, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\tau(a_0, a_{\sigma(1)} ..., a_{\sigma(n)})$$

et l'opérateur $B_0 : C^n(A) \to C^{n-1}(A)$ donné par

$$B_0(\tau)(a_0, ..., a_{n-1}) = \tau(1, a_0, ..., a_{n-1}) - (-1)^n\tau(a_0, ..., a_{n-1}, 1).$$

On pose $B = AB_0 : C^n(A) \to C^{n-1}_\lambda(A)$. Il est possible de montrer qu'il s'agit d'un morphisme de complexes, c'est à dire, il induit un opérateur

$$B : HH^n(A) \to HC^{n-1}(A). \tag{37}$$

Pour définir l'opérateur qui suit on commence par discuter le cup produit en cohomologie cyclique. Or, pour cela il est plus commod d'utiliser la déscription de la cohomologie cyclique donné par des cycles géométriques : soient $(\Omega_A, \rho_A, \int_A)$ et $(\Omega_B, \rho_B, \int_B)$ des cycles de dimensions n et m sur A et B respectivement. Soit $(\Omega_A \hat{\otimes} \Omega_B, d)$ l'algèbre différentielle graduée définie par

$$(\Omega_A \hat{\otimes} \Omega_B)^n = \bigoplus_{i+j=n} (\Omega^i_A \otimes \Omega^j_B)$$

et $d : (\Omega_A \hat{\otimes} \Omega_B)^n \to (\Omega_A \hat{\otimes} \Omega_B)^{n+1}$ est donnée par

$$d(\omega_i \otimes \omega_j) = d_A(\omega_i) \otimes \omega_j + (-1)^i \omega_i \otimes d_B(\omega_j).$$

On définit $\int : \Omega^n_A \otimes \Omega^m_B \to \mathbf{C}$ par

$$\int \omega_n \otimes \omega_m = (-1)^{nm} \int_A \omega_n \cdot \int_B \omega_m,$$

et on obtient ainsi un cycle de dimension $n+m$ sur $A \otimes B$. En fait, Connes montre que cela induit un morphisme

$$HC^n(A) \times HC^m(B) \to HC^{n+m}(A \otimes B),$$

qui est connu comme le cup produit en cohomologie cyclique. Maintenant, il y a un cas particulier très intéressant, c'est lorsque on prend $B = \mathbf{C}$ et $m = 2$. Dans ce cas on a mentionné que $HC^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$: En fait, le cocycle donné par $s_0 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ donné par $(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 \cdot a_1 \cdot a_2$ est le générateur. On peut considérer l'opérateur de période 2,

$$S : HC^n(A) \to HC^{n+2}(A), \tag{38}$$

déterminé par la multiplication par s_0.

On compte avec les opérateurs nécéssaires pour enoncer le résultat sur la suite exacte dont on a parlé plus haut.

Théorème 1.3.6. *[Connes] Soit A une algèbre, alors on a la suite exacte suivante :*

$$... \to HC^n(A) \xrightarrow{I} HH^n(A) \xrightarrow{B} HC^{n-1}(A) \xrightarrow{S} HC^{n+1}(A) \to ... \tag{39}$$

L'opérateur S ci-dessus permet aussi de donner une définition rapide de la cohomologie cyclique périodique.

Définition 1.3.7. Soit A une algèbre. La cohomologie cyclique périodique de A est donnée par

$$HP^0(A) = \varinjlim_S HC^{2n}(A) \tag{40}$$

et

$$HP^1(A) = \varinjlim_S HC^{2n+1}(A). \tag{41}$$

La cohomologie cyclique périodique est celle qui possede les bonnes propriétés, comme invariance par Morita, scindage et invariance par homotopie. De plus, cette théorie est la vrai généralisation de la théorie de De Rham. En effet, comme Connes l'a montré, si $A = C^\infty(M)$ avec M une variété compacte, alors

$$HP^*(A) \approx H_*^{DR}(M; \mathbf{C}).$$

Or, la cohomologie cyclique périodique peut être vue aussi comme la cohomologie d'un complexe. Il s'agit du complexe total du bicomplexe (b, B) que l'on donne à présent. Cette déscription est beaucoup plus explicite et permet de définir des éléments de cette espace de manière plus simple.

Soit A une algèbre. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, on note par $C^{n,m}(A) := C^{n-m}(A)$ si $n - m > 0$ et zéro sinon. On a deux différentielles

$$C^{n,m}(A) \xrightarrow{b} C^{n+1,m}(A)$$

et

$$C^{n,m}(A) \xrightarrow{B} C^{n,m+1}(A).$$

Dans [**Con85**], Connes montre que $bB + Bb = 0$ et qu'il s'agit vraiment de différentielles, $b^2 = 0$, $B^2 = 0$. Alors, on a un bicomplexe $(C^{*,*}(A), b, B)$. Connes montre également que la cohomologie totale du bicomplexe précédent est de période 2, pair et impair, et que ces espaces correspondent précisément à $HP^0(A)$ et à $HP^1(A)$ (voir aussi [**Con94**], [**CST04**]).

1.3.1. Accouplements avec la K-théorie. Comme on a vu à la section précedente, la théorie cyclique est une version noncommutative de la théorie de De Rham pour des variétés. Or, dans cette section on va rappeler les notions de base de la théorie de Chern-Connes, c'est à dire, on va voir qu'il est possible définir un analogue au caractère de Chern. En fait, on va définir un accouplement entre la $K-$théorie et la Cohomologie cyclique de A, qui correspond dans le cas géométrique classique à l'accouplement du caractère de Chern ci-dessus avec l'homologie de De Rham (des courants).

Soit A une algèbre et soit $e \in A$ un idempotent. Soit $\tau \in Z_\lambda^{2n}(A)$, on va poser

$$< \tau, e >:= \frac{(2\pi i)^{-n}}{n!} \tau(e, ..., e) \tag{42}$$

Maintenant, on veut définir un accouplement similaire mais avec des idémpotents matriciaux, $e \in M_r(A)$. Or, la cohomologie cyclique est invariante par Morita, cela veut dire en particulier que $HC^*(A) \approx HC^*(M_r(A))$, $\forall r$. En effet, l'isomorphisme est donné de manière très naturelle par le cup produit de la trace usuelle de matrices. On explique ce dernier point : Considérons $tr : M_r(\mathbf{C}) \to C$ la trace des matrices, cela définit un élément (qui est le générateur) en $HC^0(\mathbf{C})$ et donc on peut considèrer le cup produit

$$\sharp tr : HC^n(A) \to HC^n(M_r(A)),$$

où on utilise l'isomorphisme $M_r(A) \approx A \otimes M_r(\mathbf{C})$. On peut énoncer le résultat sur l'accouplement.

Théorème 1.3.8 (Connes). *Soit $\tau \in Z_\lambda^{2n}(A)$ et $e \in M_r(A)$ un idempotent (On suppose A unifère). Alors, l'expression suivante*

$$< \tau, e >:= \frac{(2\pi i)^{-n}}{n!} (\tau \sharp tr)(e, ..., e) \tag{43}$$

ne depend que des classes $[\tau] \in HC^{2n}(A)$ et $[e] \in K_0(A)$. Autrement dit, on a un accouplement bien défini

$$K_0(A) \times HC^{2n}(A) \to \mathbf{C} \tag{44}$$

On peut énoncer quelques propriétés imoprtantes de cet accouplement qui seront nécessaire pour nous dans la suite.

(1) L'accouplement décrit au théorème est compatible avec l'opérateur S, c'est à dire, on a des formules du type

$$< \tau, e >=< S\tau, e > .$$

En particulier, l'accouplement se prolonge à la Périodique cyclique,

$$K_0(A) \times HP^0(A) \to \mathbf{C}.$$

(2) L'accouplement avec la cohomologie périodique décrit au point précédent est invariant par homotopie d'idempotents : Supposons A a une structure topologique et $\tau \in HP^0(A)$ (cocycle cyclique continu). Soit $e \in C^1([0,1], A)$ (de classe C^1) avec $e_t \in A$ un idempotent pour chaque $t \in [0,1]$. Alors

$$< \tau, e_0 >=< \tau, e_1 > .$$

Une manière géométrique de voir la formule de pairing est la suivante. Soit $\tau \in HC^{2n}(A)$, on sait qu'il existe un cycle de dimension $2n$, $(\Omega, \rho, \int)$ dont le caractère est précisement τ. Avec cette image en tête, la formule (42) devient

$$< \tau, e >= \frac{(2\pi i)^{-n}}{n!} \int e \cdot (de)^{2n},$$

où on a abusé un peu de l'écriture car en principe on doit mettre ρ et la trace matricielle dans ces formules. Mais on a décidé de la présenter comme cela parce que ainsi on voit la rélation avec une formule très familiale en géometrique classique, celle du caractère de Chern. En effet, l'accouplement (44) généralise le caractère de Chern pour des variétés.

CHAPITRE 2

Groupoïdes de Lie

2.1. Groupoïdes de Lie

Dans cette section on va donner les éléments de base de la théorie de groupoïdes et plus particulierement de ceux qui nous intéressent dans ce travail, à savoir les groupoïdes de Lie. Avant voyons la définition de groupoïdes en général.

DÉFINITION 2.1.1. Un groupoïde consiste de la donnée suivante :
Deux ensembles $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^{(0)}$ et de functions
· $s, r : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ appelées source et but respectivement,
· $m : \mathscr{G}^{(2)} \to \mathscr{G}$ appelée le produit ou la composition du groupoïde, où
$\mathscr{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathscr{G} \times \mathscr{G} : s(\gamma) = r(\eta)\}$,
tels qu'il existe une application $u : \mathscr{G}^{(0)} \to \mathscr{G}$ (l'unité) et une application $i : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ (l'inverse), tel que, si on note $m(\gamma, \eta) = \gamma \cdot \eta$, $u(x) = x$ et $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, on a

1. $r(\gamma \cdot \eta) = r(\gamma)$ et $s(\gamma \cdot \eta) = s(\eta)$.
2. $\gamma \cdot (\eta \cdot \delta) = (\gamma \cdot \eta) \cdot \delta$, $\forall \gamma, \eta, \delta \in \mathscr{G}$ des que cela est possible.
3. $\gamma \cdot x = \gamma$ et $x \cdot \eta = \eta$, $\forall \gamma, \eta \in \mathscr{G}$ avec $s(\gamma) = x$ et $r(\eta) = x$.
4. $\gamma \cdot \gamma^{-1} = u(r(\gamma))$ et $\gamma^{-1} \cdot \gamma = u(s(\gamma))$, $\forall \gamma \in \mathscr{G}$.

En général on notera $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ pour dire que l'on a un groupoïde où les deux flèches parallelles représentent la source et le but.

On aura besoin de quelques notations plus ou moins classiques le long de cette thèse : Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde. Soient $A, B \subset \mathscr{G}$ deux sous-ensembles quelconques, on note par

$$\mathscr{G}_A = \{\gamma \in \mathscr{G} : s(\gamma) \in A\},$$

les flèches qui commencent en A, par

$$\mathscr{G}^B = \{\gamma \in \mathscr{G} : r(\gamma) \in B\},$$

les flèches qui finissent en B, et par

$$\mathscr{G}_A^B = \{\gamma \in \mathscr{G} : s(\gamma) \in A, r(\gamma) \in B\}$$

les éléments de $\mathscr{G}$ qui ont source en A et but en B. Ainsi, $\mathscr{G}_x$ ($\mathscr{G}^x$) est la s-fibre (r-fibre) au-dessus de x et $\mathscr{G}_x^x$ est le groupe des lacets au-dessus de x.

Définition 2.1.2 (Groupoide de Lie). Un groupoïde de Lie est un groupoïde pour lequel $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^{(0)}$ sont des variétés C^∞ ; et toutes les applications figurant dans la définition précédente sont des applications C^∞. De plus, on demande que s, r soient des submersions. En particulier, $\mathscr{G}^{(2)}$ est une variété.

On dit que un groupoïde de Lie est étale si les applications source et but (s et r) sont des applications étales (des difféomorphismes locaux).

Notre premier exemple de groupoïdes de Lie sont les groupes de Lie. Plus bas on donnera d'autres exemples.

Exemple 2.1.3 (Groupes de Lie). *Soit G un groupe de Lie. Alors*

$$G \rightrightarrows \{e\}$$

est un groupoïde de Lie avec la composition donnée par le produit du groupe, l'unité est l'élément neutre et l'inverse est l'inverse du groupe.

Comme on a vu ci-dessus les groupoïdes de Lie généralisent les groupes de Lie. Or, pour les groupoïdes de Lie il existe un concept jouant le rôle de l'algèbre de Lie pour un groupe : Il s'agit de l'algébroïde de Lie, qu'on définit maintenant :

Définition 2.1.4. Soit $\mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. L'algébroïde de Lie de $\mathscr{G}$ est le fibré vectoriel

$$A\mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$$

qui est par définition le fibré normal à l'inclusion $\mathscr{G}^{(0)} \subset \mathscr{G}$ (on identifie $\mathscr{G}^{(0)}$ à son image par u). Ainsi, la fibre au point $x \in \mathscr{G}^{(0)}$ est donnée par $A_x\mathscr{G} := T_x\mathscr{G}/T_x\mathscr{G}^{(0)}$.

Pour le cas d'un groupoïde de Lie donné par un groupe de Lie $G \rightrightarrows \{e\}$ on a bien que $AG = T_eG$, l'espace tangent à l'identité du groupe. Or, dans la théorie de Lie ce qui est plus importante c'est que cet espace tangent possède une structure d'algèbre de Lie. Dans le cadre des groupoïdes de Lie il existe aussi une notion équivalente.

Définition 2.1.5 (Algébroïde de Lie). Soit M une variété C^∞. Un algébroïde de Lie au-dessus de M est un fibré vectoriel A au-dessus de M avec une structure d'algèbre de Lie en l'espace de sections lisses $\Gamma(A)$ et un morphisme de fibrés $\rho : A \to TM$ tel que, prolongé à un morphisme entre les espaces de sections, on a

(i) $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$, et

(ii) $[X, fY] = f[X, Y] + (\rho(X)f)Y$

pour tous $X, Y \in \Gamma(A)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Il faut donner à $A\mathscr{G}$, l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde de Lie une structure d'algébroïde de Lie. Mais avant cela il faut donner une présentation de ce fibré plus convenable. Comme le morphisme source est une submersion on a que $T_x\mathscr{G}^{(0)} \oplus T_x\mathscr{G}_x \approx T_x\mathscr{G}$ pour chaque $x \in \mathscr{G}^{(0)}$. Maintenant, le fibré vectoriel $T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}} := Ker(ds)|_{\mathscr{G}^{(0)}}$ peut être identifié au fibré normal à l'inclusion $\mathscr{G}^{(0)} \subset \mathscr{G}$ puisque on a les deux suites exactes suivantes :

$$0 \to T\mathscr{G}^{(0)} \underset{ds}{\overset{du}{\rightleftarrows}} T_{\mathscr{G}^{(0)}}\mathscr{G} \to A\mathscr{G} \to 0$$

et

$$0 \to T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}} \to T_{\mathscr{G}^{(0)}}\mathscr{G} \underset{du}{\overset{ds}{\rightleftarrows}} T\mathscr{G}^{(0)} \to 0,$$

donc

$$T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}} \to T_{\mathscr{G}^{(0)}}\mathscr{G} \to A\mathscr{G} \tag{45}$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de $\mathscr{G}^{(0)}$: explicitement, pour $X \in T_x\mathscr{G}$, l'association $X \mapsto \overline{X}$ définit l'isomorphisme $T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}} \to A\mathscr{G}$ avec inverse, $\mathscr{N}^{\mathscr{G}}_{\mathscr{G}^{(0)}} \to T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}}$, donnée par

$$\overline{X} \mapsto X - (d_xu \circ d_xs)(X). \tag{46}$$

On pourrait également identifier le fibré vectoriel $Ker(dr)|_{\mathscr{G}^{(0)}}$ à $A\mathscr{G}$ en utilisant l'application r.

Avec cette description il est facile à vérifier que les sections de $A\mathscr{G}$ sont en correspondance biunivoque avec les champs de vecteurs X sur $\mathscr{G}$ qui sont $s-$verticaux et invariants à droite : $ds_*(X(\gamma)) = 0$ et invariante par la translation à droite $\forall \gamma \in \mathscr{G}$, $R_\gamma : \mathscr{G}_{r(\gamma)} \to \mathscr{G}_{s(\gamma)}$ donnée par $R_\gamma(\eta) = \eta \circ \gamma$. Maintenant, le crochet de Lie $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs s-verticaux et invariants à droite est du même type, et on a ainsi une structure d'algèbre de Lie sur $\Gamma(A\mathscr{G})$.

2.1.1. Exemples des groupoïdes de Lie. On va donner dans cette section quelques exemples de groupoïdes de Lie.

Exemple 2.1.6 (Variétés). *Soit M une variété C^∞. On peut considérer le groupoïde*

$$M \rightrightarrows M$$

où tous les morphismes sont l'identité en M. Il s'agit évidement d'un groupoïde de Lie. On se référera à ce groupoïde comme le groupoïde identité (de M).

Exemple 2.1.7 (Groupoïde d'une variété). *Soit M une variété C^∞. On peut prendre la variété produit $M \times M$ et le groupoïde*

$$M \times M \rightrightarrows M$$

avec $s(x,y) = y$, $r(x,y) = x$ et la composition donnée par $(x,y) \circ (y,z) = (x,z)$. C'est clair que l'on doit imposer $u(x) = (x,x)$ et $(x,y)^{-1} = (y,x)$ pour avoir un groupoïde de Lie. On appelle ce groupoïde "le groupoïde de M" et on le dénote par $\mathscr{G}_M$.

Exemple 2.1.8. *[Groupoïde produit fibré associé à une submersion] L'exemple suivant est une généralisation du précédent. Soit $N \xrightarrow{p} M$ une submersion. On considère le produit fibré $N \times_M N := \{(n,n') \in N \times N : p(n) = p(n')\}$, qui est une variété C^∞ parce que p est une submersion. On peut alors prendre le groupoïde*

$$N \times_M N \rightrightarrows N$$

qui est juste un sous-groupoïde de $N \times N$.

Exemple 2.1.9 (G-espaces). *Soit G un groupe de Lie agissant par difféomorphismes sur une variété C^∞, M. Le groupoïde d transformation associé à cette action est le groupoïde*

$$M \rtimes G \rightrightarrows M.$$

En tant qu'ensemble $M \rtimes G = M \times G$, et les morphismes de structure sont donnés par $s(x,g) = x \cdot g$, $r(x,g) = x$, la composition est donnée par $(x,g) \circ (x \cdot g, h) = (x, gh)$, l'unité est $u(x) = (x,e)$ et l'inverse $(x,g)^{-1} = (x \cdot g, g^{-1})$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un groupoïde de Lie.

Exemple 2.1.10 (Fibrés vectoriels). *Soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel lisse au-dessus d'une variété C^∞ X. On considère le groupoïde*

$$E \rightrightarrows X$$

avec $s(\xi) = p(\xi)$, $r(\xi) = p(\xi)$, la composition utilise la structure vectorielle et elle donnée par $\xi \circ \eta = \xi + \eta$, l'unité est évidement la section nulle et l'inverse est l'inverse additif dans chaque fibre. De nouveau il s'agit très clairement d'un groupoïde de Lie.

Exemple 2.1.11 (Groupoïde de Haefliger). *Soit q un entier positive. Le groupoïde de Haefliger Γ^q a comme espace d'objets $\mathbb{R}^q$. Une flèche $x \mapsto y$ en Γ^q est le germe d'un difféomorphisme (local) $(\mathbb{R}^q, x) \to (\mathbb{R}^q, y)$. Ce groupoïde de Lie et son espace classifiant jouent un rôle essentiel dans la théorie des feuilletages,* [**Hae84**].

Exemple 2.1.12 (Pullbacks). *Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ un groupoïde de Lie et $f : N \to M$ une submersion C^∞. Posons*

$$f^*\mathscr{G} = \{(n,\gamma,n') \in N \times \mathscr{G} \times N : f(n) = r(\gamma), f(n') = s(\gamma)\}.$$

On a un groupoïde de Lie

$$f^*\mathscr{G} \rightrightarrows N$$

avec $s(n,\gamma,n') = n'$, $r(n,\gamma,n') = n$, la composition est donnée par $(n,\gamma,n')\circ(n',\eta,n'') = (n,\gamma\circ\eta,n'')$, l'unité est $u(n) = (n,u(f(n)),n)$ et l'inverse $(n,\gamma,n')^{-1} = (n',\gamma^{-1},n)$. De plus, on a par définition le suivant diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} f^*\mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathscr{G} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ N \arrow[r, "f"'] & M. \end{tikzcd}$$

En fait, $f^*\mathscr{G}$ est un sous-groupoïde de $N \times N \times \mathscr{G}$.

Exemple 2.1.13 (Orbifolds). *Un Orbifold est un groupoïde étale pour lequel l'application $(s,r) : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)} \times \mathscr{G}^{(0)}$ est une application propre. Pour plus de détailles voir* [**Moe02**].

Exemple 2.1.14 (Groupoïde associé à un revêtement). *Soit Γ un groupe discret agissant proprement et librement sur une variété $\widetilde{M}$ avec quotient compact $\widetilde{M}/\Gamma := M$. Notons $\mathscr{G}$ le quotient de $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ par l'action diagonale de Γ. On a un groupoïde de Lie $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)} = M$ avec $s(\widetilde{x},\widetilde{y}) = y$, $r(\widetilde{x},\widetilde{y}) = x$ et composition donnée par $(\widetilde{x},\widetilde{y}) \circ (\widetilde{y},\widetilde{z}) = (\widetilde{x},\widetilde{z})$. En fait, comme $(\widetilde{x},\widetilde{y}) = (\widetilde{x}g,\widetilde{y}g)$, la dernière égalité est suffisante pour définir la composition des éléments composables.*

Un cas particulier de cette situation est lorsque $\Gamma = \pi_1(M)$ et $\widetilde{M}$ est le revêtement universel.

Exemple 2.1.15 (Groupoïde d'holonomie associé à un feuilletage). *Soit M une variété C^∞ compacte de dimension n. On appelle feuilletage (régulier) de dimension p (avec $0 \leq p \leq n$) à la variété M avec un sous-fibré F du fibré tangent TM intégrable. Pour nous (grâce au théorème de Frobenius) intégrable veut dire que $C^\infty(F) := \{X \in C^\infty(M,TM) : \forall x \in M, X_x \in F_x\}$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(M,TM)$. Ceci détermine une partition de la variété M en sous-variétés plongées (les feuilles), donnée par la solution d'intégrer F.*

Le groupoïde d'holonomie de (M,F) est un groupoïde de Lie

$$\mathscr{G}(M,F) \rightrightarrows M$$

d'algébroïde de Lie $A\mathscr{G} = F$ et minimal dans le sens suivant : n'importe quel groupoïde de Lie intégrant le feuilletage[1] *contient un sous-groupoïde ouvert qui s'envoie (de manière C^∞) sur $\mathscr{G}(M,F)$. En particulier les orbites de ce groupoïde sont précisément les feuilles de (M,F), i.e., pour chaque $x \in M$, $r(\mathscr{G}_x)$ est égale à la feuille qui passe par x.*

Le groupoïde d'holonomie a été construit par Ehresmann [**Ehr65**] *et Winkelnkemper* [**Win83**] *(voir aussi* [**CC00**], [**God91**], [**Pat99**] *ou* [**Vas01**]*).*

[1]qui a aussi F comme algébroïde

2.2. Algèbres associées à un groupoïde de Lie

Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. On supposera pour l'instant que $\mathscr{G}$ est une variété séparée. Ici, on suit principalement le deuxième chapitre de [**Pat99**] et le premier chapitre de [**Vas01**].

2.2.1. À l'aide des systèmes de Haar. De la même façon que l'algèbre d'un groupe peut été construit à l'aide d'une mesure de Haar, il est possible de faire de manière similaire pour les groupoïdes. Les systèmes de Haar pour des groupoïdes ont été introduit par Jean Renault, [**Ren80**], et comme leur nom le dit ils jouent un rôle analogue aux mesures de Haar pour des groupes. On commence par donner la définition d'un système de Haar.

Définition 2.2.1 (Système de Haar (lisse)). On appelle *systeme de Haar* (invariant à droite) sur $\mathscr{G}$ la donnée d'une famille $(\mu_x)_{x\in\mathscr{G}^{(0)}}$ de mesures positives sur $\mathscr{G}$ vérifiante que :

(i) le support de la mesure μ_x est contenu dans $\mathscr{G}_x$,

(ii) $(\mu_x)_{x\in\mathscr{G}^{(0)}}$ est un système de mesures $\mathscr{G}$-équivariant à droite : Pour tout $\eta : x \to y \in \mathscr{G}$ et $f \in C^\infty(\mathscr{G})$, on a :
$$\textstyle\int_{\mathscr{G}_x} f(\gamma)d\mu_x(\gamma) = \int_{\mathscr{G}_y} f(\gamma\circ\eta)d\mu_y(\gamma).$$
En particulier la mesure μ_x est invariante par l'action à droite du groupe $\mathscr{G}_x^x$.

(iii) Pour toute $f \in C^\infty(\mathscr{G})$, l'application $\tilde{f} : \mathscr{G}^{(0)} \to \mathbb{C}$ donnée par
$$x \mapsto \int_{\mathscr{G}_x} f(\gamma)d\mu_x(\gamma)$$
appartient à $C_c^\infty(\mathscr{G}^{(0)})$.

On peut à présent définir le produit de convolution sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$: Soient $f, g \in C_c^\infty(\mathscr{G})$ et $\gamma \in \mathscr{G}$, alors $f * g$ donnée par
$$(f*g)(\gamma) = \int_{\mathscr{G}_{s(\gamma)}} f(\gamma\circ\eta^{-1})g(\eta)d\mu_{s(\gamma)}(\eta)$$
définit un élément de $C_c^\infty(\mathscr{G})$. Ce produit fait de $C_c^\infty(\mathscr{G})$ une algèbre associative.

Définir la C^*-algèbre réduite dans ce cas est simple, il suffit de considérer la complétion de $C_c^\infty(\mathscr{G})$ par rapport à la norme
$$\|f\|_r = \sup_{x\in\mathscr{G}^{(0)}} \|\pi_x(f)\|,$$
où chaque π_x est la représentation régulière de $C_c^\infty(\mathscr{G})$ dans $L^2(\mathscr{G}_x, \mu_x)$. Pour le cas de la C^*-maximal, on complète $C_c^\infty(\mathscr{G})$ par rapport à la norme sup de toutes les représentations unitaires continues de $C_c^\infty(\mathscr{G})$.

Dans notre cadre, on veut de plus que ces mesures soient dans la classe de Lebesgue. Dans un groupoïde de Lie il y a toujours des tels systèmes. En effet, toute 1-densité (voir définition plus bas) positive sur $A^*\mathscr{G}$ définit un système de Haar (théorème 2.3.1 dans [**Pat99**]). On supposera dorénavant que tous nos groupoïdes de Lie sont munis d'un système de Haar défini à partir d'une densité.

2.2.2. À l'aide des demi-densités. On va définir le fibré de demi-densités sur un groupoïde de Lie, introduit par Alain Connes et noté par $\Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G}$. Le but de ce paragraphe est de munir $C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$ d'une structure d'algèbre. Commençons par rappeller les notions élémentaires sur les densités.

Définition 2.2.2 (s-densités). Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $s > 0$. Une s-densité sur V est une application

$$f : \Lambda^n V \to \mathbb{R} \text{ (où } \mathbb{C})$$

qui satisfait $f(\lambda \cdot \omega) = |\lambda|^s \cdot f(\omega)$. On note par $|\Lambda|^s V$ l'ensemble des s-densités sur V.

Soit à présent $V \xrightarrow{\rho} X$ un fibré vectoriel (lisse) au-dessus d'une variété X. On peut considérer le fibré des s-densités, $|\Lambda|^s V$, associé à V et défini de la manière suivante :

$$(|\Lambda|^s V)_x := |\Lambda|^s V_x$$

Ce dernier est un fibré vectoriel au-dessus de X. On appellera une s-densité sur $V \xrightarrow{\rho} X$ une section du fibré $|\Lambda|^s V$.

L'intéret d'avoir introduit les s-densités est le suivant : Considérons le cas où X est une variété C^∞ et $V = TX$, le fibré tangent à X. Dans ce cas on verra qu'il est possible d'integrer les 1-densités sans besoin de demander des conditions d'orientabilité sur la variété. Prenons donc Ψ une 1-densité de $|\Lambda|^1 TX$ une 1-densité. Soit $f \in C_c^\infty(X)$, on peut intégrer $\int f\Psi$: pour une partiton de l'unité (ϕ_i) associée à un recouvrement par des ouverts de cartes U_i :

$$\int_X f\Psi = \sum_i f\phi_i \Psi(\partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_n}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Grâce à la formule de changement de variable, cette formule ne dépend pas de choix.

Passons à définir le fibré de demi-densités sur $\mathscr{G}$, celui-ci est donné par

$$\Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G} = r^*(|\Lambda|^{\frac{1}{2}} A\mathscr{G}) \otimes s^*(|\Lambda|^{\frac{1}{2}} A\mathscr{G}),$$

et donc la fibre en γ est donnée par :

$$\Omega_\gamma^{\frac{1}{2}}\mathscr{G} = |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{r(\gamma)}\mathscr{G} \otimes |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{s(\gamma)}\mathscr{G}.$$

On peut maintenant définir le produit sur $C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$: Soient $f, g \in C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$ et $\gamma \in \mathscr{G}$. Pour définir $(f * g)(\gamma)$ il suffit de dire comme cet élément s'évalue en $(v, w) \in \Lambda^q A_{r(\gamma)}\mathscr{G}) \otimes \Lambda^q A_{s(\gamma)}\mathscr{G})$ où $q = dim_{vect} A\mathscr{G}$. Soit $\delta\mathscr{G}_{s(\gamma)}$, on a que $f(\gamma\delta^{-1}) \in |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{r(\gamma)}\mathscr{G}) \otimes |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{r(\delta)}\mathscr{G})$ et donc $f(\gamma\delta^{-1})(v) \in |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{r(\delta)}\mathscr{G})$. De manière similaire $g(\delta)(w) \in |\Lambda|^{\frac{1}{2}} A_{r(\delta)}\mathscr{G})$. Alors $f(\gamma\delta^{-1})(v)g(\delta)(w)$ définit une 1-densité de $r^*(A\mathscr{G})$ comme fibré au-dessus de $\mathscr{G}_{s(\gamma)}$. On peut alors poser

$$(f * g)(\gamma)(v, w) = \int_{\mathscr{G}_{s(\gamma)}} f(\gamma\delta^{-1})(v)g(\delta)(w).$$

On a aussi une involution donnée par

$$f^*(\gamma)(v, w) = \overline{f(\gamma^{-1})(w, v)}.$$

On a de cette manière une *-algèbre associative $C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$. De plus, comme le fibré $\Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G}$ est trivial (non canoniquement) on a une structure de *-algèbre sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$.

Pour définir la C^*-algèbre réduite du groupoïde on a besoin d'introduire l'espace $L^2(\mathscr{G}_x)$ des demi-densités de carré intégrable comme l'ensemble des sections du fibré $|\Lambda|^{\frac{1}{2}}$ au-dessus de $\mathscr{G}_x$ complété par la norme définie par

$$\|f\|^2 = \int_{\mathscr{G}_x} \overline{f(\gamma)} f(\gamma).$$

Il existe pour tout x une représentation naturelle π_x de $C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$ dans $\mathscr{B}(L^2(\mathscr{G}_x))$ donnée par :

$$\pi_x(f)(\xi)(\gamma) = \int_{\mathscr{G}_x} f(\gamma\delta^{-1})\xi(\delta).$$

La C^* réduite du groupoïde $C_r^*(\mathscr{G})$ est la complétion de $C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G})$ par la norme

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathscr{G}^{(0)}} \|\pi_x(f)\|.$$

On peut aussi définir la C^*-maximale en prenant la complétion par rapport à toutes les répresentations unitaires continues.

Remarque 2.2.3. Dans les deux cas il faut vérifier que les représentations utilisées sont uniformément bornées par rapport à la norme $\| \, \|_1$. Pour plus de détails voir [**Ren80**].

Remarque 2.2.4. Les deux approches donnent le même résultat : En effet, le choix d'une 1-densité positive sur $A^*\mathscr{G}$, α, pour avoir un système de Haar, induit un isomorphisme $C_c^\infty(\mathscr{G}) \to C_c^\infty(\mathscr{G}, \Omega^{\frac{1}{2}}\mathscr{G}) : f \mapsto f(r^*\alpha)^{\frac{1}{2}}(s^*\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

2.3. Théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie

L'ingrédient principal pour pouvoir faire la théorie de l'indice est d'avoir un bon calcul pseudodifférentiel. Pour le cas des groupoïdes de Lie en général le calcul correspondant a été défini au cours des années par plusieurs mathématiciens, Connes, Monthubert-Pierrot, Nistor-Weinstein-Xu parmi d'autres. Ce calcul généralise les cas classique et des familles utilisés par exemple par Atiyah-Singer. Dans la section prochaine on va suivre principalement [**MP97**] et [**NWX99**].

2.3.1. $\mathscr{G}$-Calcul pseudodifférentiel.

Définition 2.3.1 ($\mathscr{G}$-Opérateurs Pseudodifférentiels). Un $\mathscr{G}$-Opérateur Pseudodifférentiel d'ordre m, P, agissant dans les sections en un fibré vectoriel $E \to \mathscr{G}^{(0)}$ au-dessus de $\mathscr{G}^{(0)}$, est une famille différentiable $P := (P_x, x \in \mathscr{G}^{(0)})$ d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m, P_x, agissant en $C_c^\infty(\mathscr{G}_x, r^*(E))$ et qui sont $\mathscr{G} - invariants$. La condition d'invariance veut dire que l'on a la propriété suivante :

$$P_r(\gamma)U_\gamma = U_\gamma P_{s(\gamma)} \tag{47}$$

pour tout $\gamma \in \mathscr{G}$ et où $U_\gamma : C_c^\infty(\mathscr{G}_{r(\gamma)}, r^*(E)) \to C_c^\infty(\mathscr{G}_{s(\gamma)}, r^*(E))$ est donnée par $U_\gamma(f)(\eta) = f(\eta\gamma)$. La condition de famille différentiable est rigoureusement définie dans [**NWX99**], définition 6.

Dans cette thèse on travaillera avec un certain type des $\mathscr{G}$-opérateurs. On les définit à présent.

Définition 2.3.2 (Opérateurs uniformément supportés). Soit $P = (P_x, x \in \mathscr{G}^{(0)})$ un $\mathscr{G}-$opérateur psedudodifférentiel. Dénotons par k_x le noyau de Schwartz de P_x. Posons

$$supp\, P := \overline{\cup_x supp\, k_x}.$$

Le support réduit de P est par définition $supp_\mu P := \mu_1(supp\, P)$, où $\mu_1(g', g) = g'g^{-1}$. On dira que P est supporté uniformément si son support réduit est compact. Lorsque $\mathscr{G}^{(0)}$ est compacte cette définition peut se dire autrement : la condition de $\mathscr{G}-$invariance implique que la famille $(k_x)_{x\in\mathscr{G}^{(0)}}$ induit une distribution sectionelle K de $End(E)$ au-dessus de $\mathscr{G}$ (cela est un fait général).Alors P est uniformément compact si le support de K est compact dans $\mathscr{G}$.

On va noter par $\Psi^m(\mathscr{G}, E)$ l'espace des $\mathscr{G}$-opérateurs pseudodifférentiel supportés uniformément, agissant sur les sections du fibré vectoriel E. On note aussi,

$$\Psi^\infty(\mathscr{G}, E) = \bigcup_m \Psi^m(\mathscr{G}, E) \text{ et } \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E) = \bigcap_m \Psi^m(\mathscr{G}, E).$$

La première remarque importante est que la composition $PQ = (P_xQ_x, x \in \mathscr{G}^{(0)})$ de deux $\mathscr{G}$-opérateurs supportés uniformément est de nouveau supporté uniformément (lemme 3, [**NWX99**]). En fait, $\Psi^\infty(\mathscr{G}, E)$ est une algèbre filtrée (théorème 1, réf.cit.), *i.e.*,

$$\Psi^m(\mathscr{G}, E)\Psi^{m'}(\mathscr{G}, E) \subset \Psi^{m+m'}(\mathscr{G}, E).$$

En particulier, $\Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E)$ est un idéal bilatère.

Remarque 2.3.3. Le choix de la condition sur le support se justifie du fait que $\Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E)$ s'identifie à $C_c^\infty(\mathscr{G}, End(E))$, grâce au théorème du noyau de Schwartz. Plus généralement, $\Psi^\infty(\mathscr{G}, E)$ est une algèbre de distributions sectionelles K de $End(E)$ au-dessus de $\mathscr{G}$ (comme la définition ci-dessus) qui sont de classe C^∞ en dehors de $\mathscr{G}^{(0)}$. Vu comme cela, l'opération d'algèbre est donnée par la convolution des distributions.

La notion du symbole principal s'étend aussi à ce cadre. Notons par $\pi : A^*\mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ la projection. Pour $P = (P_x, x \in \mathscr{G}^{(0)}) \in \Psi^m(\mathscr{G}, E, F)$, le symbole principal de P_x, $\sigma_m(P_x)$, est une section C^∞ du fibré vectoriel $Hom(\pi_x^* r^* E, \pi_x^* r^* F)$ au-dessus de $T^*\mathscr{G}_x$ (où $\pi_x : T^*\mathscr{G}_x \to \mathscr{G}_x$), telle que dans chaque fibre le morphisme défini est homogène de dégrée m (voir [**AS68a**] pour plus de détail). Or, il existe une section $\sigma_m(P)$ (homogène en chaque fibre et C^∞) du fibré $Hom(\pi^*E, \pi^*F)$ au-dessus de $A^*\mathscr{G}$ telle que

$$\sigma_m(P)(\xi) = \sigma_m(P_x)(\xi) \in Hom(E_x, F_x) \text{ si } \xi \in A_x^*\mathscr{G} \tag{48}$$

Ainsi, l'équation (48) ci-dessus détermine une unique application linéaire

$$\sigma_m : \Psi^m(\mathscr{G}, E) \to \mathscr{S}^m(A^*\mathscr{G}, Hom(E, F)), \tag{49}$$

qui est de plus surjective avec noyau $\Psi^{m-1}(\mathscr{G}, E)$ (voir par exemple [**Con79**] ou proposition 2 [**NWX99**]) et où $\mathscr{S}^m(A^*\mathscr{G}, Hom(E, F))$ dénote les sections du fibré $Hom(\pi^*E, \pi^*F)$ au-dessus de $A^*\mathscr{G}$ homogènes de dégrée m dans chaque fibre.

2.3.2. $\mathscr{G}$-indices analytiques.

Définition 2.3.4 ($\mathscr{G}$-Opérateurs elliptiques). Soit $P = (P_x, x \in \mathscr{G}^{(0)})$ un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel. On dira que P est elliptique si chaque P_x est elliptique.

En revenant à la discussion sur le symbole principal ci-dessus, on voit bien qu'un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel P elliptique définit via l'application linéaire (49) une classe de $K-$théorie $[\sigma(P)] \in K^0(A^*\mathscr{G})$. Alors si l'on dénote par $Ell(\mathscr{G})$ l'ensemble des $\mathscr{G}$-opérateurs psedudodifférentiels elliptiques on a une correspondance donnée par le symbole principale

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{symb} K^0(A^*\mathscr{G}). \tag{50}$$

Proposition 2.3.5. [**Con79**] *Soit* $P = (P_x, x \in \mathscr{G}^{(0)}) \in \Psi^m(\mathscr{G}, E)$ *elliptique. Alors il existe* $Q \in \Psi^{-m}(\mathscr{G}, E)$ *tel que*

$$I_E - PQ \in \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E) \text{ et } I_E - QP \in \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E),$$

où I_E *dénote l'opérateur identité sur* E.

Rappelons (cf. exemple 1.1.7) que si (A, I) est un couple d'algèbres, alors un élément inversible de A modulo I définit un quasi-isomorphisme sur (A, I). De la proposition précédente, on a immédiatement que un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique $P \in \Psi^\infty(\mathscr{G})$ définit un quasi-isomorphisme sur $(\Psi^\infty(\mathscr{G}), \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}))$, qui revient à un quasi-isomorphisme sur $(\Psi^\infty(\mathscr{G}), C_c^\infty(\mathscr{G}))$ par le théorème du noyau de Schwartz. Or, dans l'exemple 1.1.8 on a vu que l'élément en $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ défini par le quasi-isomorphisme déterminé par P avec parametrix Q est donné explicitement par

$$\left[T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in K_0(\widetilde{C_c^\infty(\mathscr{G})}), \tag{51}$$

où 1 est l'unité de l'algèbre $\widetilde{C_c^\infty(\mathscr{G})}$ (unitarisation de $C_c^\infty(\mathscr{G})$), et où T est donné par

$$T = \begin{pmatrix} (1-PQ)P + P & PQ - 1 \\ 1 - QP & Q \end{pmatrix}$$

avec inverse

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} Q & 1 - QP \\ PQ - 1 & (1-PQ)P + P \end{pmatrix}.$$

Maintenant, dans le cas général où P agit sur les sections d'un fibré vectoriel E à valeurs dans les sections d'un fibré vectoriel F, on obtient de la même forme un élément en $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}, Hom(E,F)))$. Or, $C_c^\infty(\mathscr{G}, Hom(E,F)))$ est Morita équivalente à $C_c^\infty(\mathscr{G})$ et on a donc un élément de $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ aussi. Une autre manière d'arriver au même élément est la suivante : L'algèbre $C_c^\infty(\mathscr{G}^{(0)})$ est contenue dans $\Psi^0(\mathscr{G})$ et donc on peut pousser les $C_c^\infty(\mathscr{G}^{(0)})$-modules E, F en des $\Psi^\infty(\mathscr{G})$-modules $\mathscr{E}, \mathscr{F}$. L'existence d'un parametrix (proposition 2.3.5) est précisément le fait que $(\mathscr{E}, \mathscr{F}, P)$ est un quasi-isomorphisme sur $(\Psi^\infty(\mathscr{G}), C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Dans tous les cas on a toujours qu'un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique définit un élément de $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 2.3.6 (Indice analytique lisse). Soit P un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique. On note par $ind\, P \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ l'élément défini par P comme au paragraphe précédent. On l'appelle l'indice analytique lisse de P. Cela définit donc une correspondance

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{ind} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})). \tag{52}$$

On a ainsi deux applications, (50) et (52), à partir de $Ell(\mathscr{G})$. Dans le cas classique d'une variété X, on avait vu que l'indice analytique (indice de Fredholm) ne dépend que de la classe du simbole principale en $K^0(T^*X)$. Autrement dit, dans ce cas la correspondance (52) se factorise à travers le symbole principale, *i.e.*, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Ell(X) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & \mathbb{Z} \\ K^0(T^*X) \arrow[ur, "ind_a"'] & \end{tikzcd} .$$

Cette propriété est fondamentale pour la théorie de l'indice classique. Elle permet de voir l'indice comme un morphisme de groupes, d'utiliser les outils de $K-$théorie topologique comme l'isomorphisme de Thom (Bott), la compatibilité avec des sous-variétés ouvertes, la structure d'anneau en $K-$théorie parmi d'autres propriétés. Mais de plus, le groupe $K^0(T^*X)$ codifie l'information essentielle dont on a besoin des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques.

Revenant au cas général, on voudrait avoir la même propriété. C'est à dire, que (52) se factorise par (50). Néanmoins, en général on n'a pas cette propriété. En résume, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} ,$$

où la flèche pointée n'existe pas tout le temps. On donne un exemple de cette situation ([**Con94**] pp. 142).

Exemple 2.3.7. *Soit* $\mathbb{R} \to \{0\}$ *le groupoïde donné par la structure de groupe (additive) de* $\mathbb{R}$. *Dans* [**Con94**] *(proposition 12, II.10.γ), Connes montre que l'application*

$$D \mapsto ind\, D \in K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}))$$

définit une injection de l'espace projectif des polynômes non nuls $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ *dans* $K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}))$.

Cependant, si l'on considère le morphisme de K-théorie

(53) $$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

induit par l'inclusion $C_c^\infty(\mathscr{G}) \subset C_r^*(\mathscr{G})$, alors la correspondance

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{ind} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

se factorise à travers le symbole principale par un morphisme que l'on note par ind_a. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Ell(\mathscr{G}) & \xrightarrow{ind} & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \\ {\scriptstyle symb}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) & \xrightarrow[ind_a]{} & K_0(C_r^*(\mathscr{G})). \end{array}$$

En effet, ind_a est le morphisme d'indice (ou de bord) associé à la suite exacte courte des C^*algèbres ([**Con79**], [**CS84**], [**MP97**], [**NWX99**])

$$0 \to C_r^*(\mathscr{G}) \longrightarrow \overline{\Psi^0(\mathscr{G})} \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*\mathscr{G}) \to 0 \tag{54}$$

où $\overline{\Psi^0(\mathscr{G})}$ est une C^*-complétion adéquate de $\Psi^0(\mathscr{G})$, $S^*\mathscr{G}$ est le fibré en spheres de $A^*\mathscr{G}$ et σ est l'extension du symbole principale.

Définition 2.3.8. [$\mathscr{G}$-Indice analytique] Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Le morphisme

$$K^0(A^*\mathscr{G}) \xrightarrow{ind_a} K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \tag{55}$$

est appelé l'indice analytique de $\mathscr{G}$. On utilisera parfois la notation $ind_{a,\mathscr{G}}$ pour remarquer le groupoïde dont on parle.

L'indice analytique est un bon invariante parce que la K-théorie pour des C^* est une théorie qui jout de remarquables propriétés. Par exemple, on va décrire un théorème de l'indice dans ce cadre. Cependant, comme on a discuté dans la introduction de cette thèse, il est parfois préférable de rester au niveau C^∞. On reviendra à ce point plus tard dans ce travail.

2.3.2.1. *Théorème de l'indice longitudinal de Connes-Skandalis.* Dans cette sous-section on va énoncer le théorème de l'indice longitudinal de Connes et Skandalis, [**CS84**]. Expliquons d'abord l'énoncé du théorème. Soit (M, F) une variété feuilletée compacte et soit $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ le groupoïde d'holonomie associé. Comme on a vu ci-dessus on a un indice analytique

$$K^0(T^*F) \xrightarrow{ind_{a,\mathscr{G}}} K_0(C_r^*(\mathscr{G})).$$

Dans le cas de feuilletages on peut aussi définir un morphisme d'indice topologique de la facon suivante :

Définition 2.3.9 (Indice topologique longitudinal de Connes-Skandalis). Soit (M, F) une variété feuillétée. Prenons un plongement $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{2m}$. Considérons la variété $M \times \mathbb{R}^{2m}$ feuillétée par feuilles de la forme $L \times \{t\}$ où L est une feuille de (M, F), plus formellement, on considére la variété feuillétée $(M \times \mathbb{R}^{2m}, F \times \{0\})$, ce feuilletage a comme groupoïde d'holonomie $\tilde{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}$. Soit T le fibré vectoriel au-dessus de M normal à F en $\mathbb{R}^{2m}$, c'est à dire, $T_x := (i_*(F_x))^\perp$. On peut utiliser l'application

$g : T \to M \times \mathbb{R}^{2m}$ donnée par $g(x, \xi) = (x, i(x) + \xi)$ pour idéntifier T à une transversal ouverte du feuilletage $(M \times \mathbb{R}^{2m}, F \times \{0\})$, on note cette transversale toujours par T. Soient N le fibré normal à l'inclusion $T \subset M \times \mathbb{R}^{2m}$, on peut prendre un voisinage Ω de T en $M \times \mathbb{R}^{2m}$ de telle facon que l'on ait $\tilde{\mathscr{G}}|_\Omega := \mathscr{G}_\Omega \approx N \times_T N$ où $N \times_T N \rightrightarrows N$ est le groupoïde pair sur T. Il est facile de vérfier que l'algebroïde de Lie de ce dernier groupoïde peut s'idéntifier à $F \oplus \mathbb{R}^{2m} \cong F \oplus F \oplus T$. Or, la C^*-algèbre $C^*(N \times_T N)$ est Morita équivalent à $C_0(T)$. Alors, l'inclusion $C^*(N \times_T N) \subset C^*(\tilde{\mathscr{G}})$ induit un morphisme en K-théorie

$$\iota : K^0(T) \to K_0(C^*(\tilde{\mathscr{G}})).$$

On peut aussi considèrer l'isomorphisme

$$\mathscr{B} : K^0(F) \overset{Bott}{\to} K^0(F \oplus \mathbb{R}^{2m}) \cong K_0(F \oplus F \oplus T) \overset{Thom^{-1}}{\to} K^0(T),$$

et l'isomorphisme de Bott pour des C^*-algèbres $K_0(C^*(\tilde{\mathscr{G}})) \overset{Thom^{-1}}{\to} K_0(C^*(\mathscr{G}))$. On définit l'indice topologique (de Connes-Skandalis) comme le morphisme

$$ind_{t,\mathscr{G}} : K^0(F) \to K_0(C^*_r(\mathscr{G}))$$

donné par la composé

$$K^0(F) \xrightarrow{\mathscr{B}} K^0(T) \xrightarrow{\iota} K_0(C^*_r(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m})) \xrightarrow{Bott^{-1}} K_0(C^*_r(\mathscr{G})).$$

Le théorème de l'indice longitudinal généralise celui d'Atiyah-Singer, même le cas des familles. On peut à présent énoncer le théorème.

Théorème 2.3.10 ([**CS84**], Connes-Skandalis). *Soit (M, F) une variété feuilletée. Alors*

$$ind_{a,\mathscr{G}} = ind_{t,\mathscr{G}},$$

comme morphismes de $K^0(F^*)$ en $K_0(C^*_r(\mathscr{G}))$. En particulier l'indice $ind_{t,\mathscr{G}}$ ne dépend pas de choix.

CHAPITRE 3

Déformation au cône normal

3.1. Déformation au cône normal

Soit M une variété C^∞ et X une sous-variété C^∞ de M. Considérons le fibré normal à l'inclusion $X \subset M$, c'est à dire, le fibré vectoriel $\mathscr{N}_X^M \to X$ sur X avec $\mathscr{N}_X^M := T_X M/TX$.

On définit l'ensemble

$$\mathscr{D}_X^M = \mathscr{N}_X^M \times 0 \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*.$$

Le propos de cette section est de munir $\mathscr{D}_X^M$ d'une structure de variété C^∞. Pendant ce travail on utilisera les lettres capitales comme U et V pour dénoter des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et des lettres cursives comme $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ pour dénoter des ouverts d'une variété en général.
On va commencer par le cas simple, qui nous mènera à la fin au cas général. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, on note $q = n - p$. Considérons l'inclusion canonique $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$, dans ce cas on note $\mathscr{D}_{\mathbb{R}^p}^{\mathbb{R}^n}$ par $\mathscr{D}_p^n$. On voit que comme ensemble $\mathscr{D}_p^n$ n'est rien d'autre que $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$. On définit une fonction $\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to \mathscr{D}_p^n$ par

$$\psi(x, \xi, t) = \begin{cases} (x, \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (x, t\xi, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \tag{56}$$

En fait, cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ sur $\mathscr{D}_p^n$ avec ψ^{-1} donnée explicitement par

$$\psi^{-1}(x, \xi, t) = \begin{cases} (x, \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (x, \frac{1}{t}\xi, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On peut alors considérer la structure C^∞ sur $\mathscr{D}_p^n$ induite par cette bijection.

Il est clair que $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^*$, avec sa structure usuelle, est un sous-ensemble ouvert de $\mathscr{D}_p^n$. Le seule changement essentiel sur la structure C^∞ de $\mathscr{D}_p^n$, par rapport à celle de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$, se trouve en zéro. Avant de passer au cas général on décrit le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert et $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ (toujours $n = p + q$). On a que

$$\mathscr{D}_V^U = V \times \mathbb{R}^q \times \{0\} \bigsqcup U \times \mathbb{R}^* \tag{57}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathscr{D}_p^n$ avec la structure décrite ci-dessus puisque $\psi^{-1}(\mathscr{D}_V^U)$ est égal à

$$\Omega_V^U = \{(x,\xi,t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} : (x, t\xi) \in U\} \tag{58}$$

qui est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ et donc une variété C^∞.

Passons au cas général $X \subset M$. On va supposer que M est de dimension n et que X est de dimension p.

Définition 3.1.1. On appelle "carte adaptée à X" une carte coordonnée $(\mathcal{U},\phi)$ de classe C^∞ en M qui satisfait :
1) $\phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\cong} U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$
2) Si $\mathcal{U} \cap X = \mathcal{V}$, $\mathcal{V} = \phi^{-1}(V)$ (où $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ comme ci-dessus)

On veut définir des applications

$$\tilde{\phi} : \mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \to \mathscr{D}_V^U$$

Pour $x \in \mathcal{V}$ on a que $\phi(x) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Si on écrit $\phi(x) = (\phi_1(x), 0)$, alors

$$\phi_1 : \mathcal{V} \to V \subset \mathbb{R}^p$$

est un difféomorphisme. On définit

$$\tilde{\phi} : \mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \to \mathscr{D}_V^U$$

tout simplement par

$$\tilde{\phi}(v,\xi,0) = (\phi_1(v), d_N\phi_v(\xi), 0) \text{ et}$$
$$\tilde{\phi}(u,t) = (\phi(u), t)$$

pour $t \neq 0$. Ici $d_N\phi_v : \mathscr{N}_v \to \mathbb{R}^q$ est juste la composante normale de la dérivée $d\phi_v$ pour $v \in \mathcal{V}$. Il est clair que $\tilde{\phi}$ est aussi une bijection (en particulier induit aussi une structure C^∞ sur $\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$).
Maintenant, associé à une carte adaptée $(\mathcal{U},\phi)$, on considère le sous-ouvert Ω_V^U de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ comme en (58) et le difféomorphisme

$$\varphi = \psi^{-1} \circ \tilde{\phi} : \mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \to \Omega_V^U \tag{59}$$

où ψ est comme en (56). On veut définir un atlas sur $\mathscr{D}_X^M$ en utilisant des cartes adaptées à X et ces fonctions φ associées comme ci dessus.

Soit $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ un atlas C^∞ de M qui consiste de cartes adaptées à X (c'est toujours possible d'en trouver un). On a bien que

$$\mathscr{D}_X^M = \cup_{\alpha\in\Delta} \mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}$$

On va montrer que la collection suivante

$$\{(\mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta} \tag{60}$$

détermine un atlas C^∞ pour $\mathscr{D}_X^M$.

Il est clair que chaque $(\mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}, \varphi_\alpha)$ est compatible avec $(\mathcal{U}_\beta \times \mathbb{R}^*, \phi_\beta \times id_{\mathbb{R}^*})$. Soient $\alpha, \beta \in \Delta$. On veut montrer que l'application

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \cap \mathscr{D}_{\mathcal{V}_\beta}^{\mathcal{U}_\beta}) \to \varphi_\beta(\mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha} \cap \mathscr{D}_{\mathcal{V}_\beta}^{\mathcal{U}_\beta})$$

est C^∞. Or, par définition,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(v, \xi, t) = \begin{cases} (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(v), d_N(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_v(\xi), 0) & \text{si } t = 0 \\ (\frac{1}{t}\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(v, t\xi), t) & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Le seul problème se pose en $t = 0$ puisque en dehors de zéro toutes les fonctions qui apparaissent sont C^∞. Maintenant le résultat pour $t = 0$ se déduit immédiatement du lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.1.2. *Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $F : U \to \mathbb{R}$ une application C^∞ nulle sur $U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. Alors l'application $\tilde{F} : \Omega_V^U \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi & si\ t = 0 \\ \frac{1}{t} F(x, t\xi) & si\ t \neq 0 \end{cases}$$

est une application C^∞ où $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) = (\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(x, 0), ..., \frac{\partial F}{\partial \xi_q}(x, 0))$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que grâce au développement en série de Taylor on a

$$F(x, \xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, \xi) \cdot \xi$$

avec $h : U \to \mathbb{R}^q$ une application C^∞ telle que $h(x, 0) = 0$. Alors

$$\frac{1}{t} F(x, t\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi + h(x, t\xi) \cdot \xi$$

d'où on conclut le résultat.

□

La preuve de la proposition suivante est immédiate du lemme précédent, il faut juste appliquer le lemme coordonnée par coordonnée.

Proposition 3.1.3. *Soient $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $U' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ des sous-ensembles ouverts. Soit $F : U \to U'$ une application C^∞ avec $F_2(x, 0) = 0$, si on écrit $F = (F_1, F_2)$. Alors l'application $\tilde{F} : \Omega_V^U \to \Omega_{V'}^{U'}$ (Ω comme en (58)) donnée par*

$$\tilde{F}(x, \xi, t) = \begin{cases} (F_1(x, 0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x, 0) \cdot \xi, 0) & si\ t = 0 \\ (F_1(x, t\xi), \frac{1}{t} F_2(x, t\xi), t) & si\ t \neq 0 \end{cases}$$

est aussi de classe C^∞.

Définition 3.1.4 (Déformation au cône normal). Étant données $X \subset M$ comme ci-dessus, l'ensemble $\mathscr{D}_X^M$ muni de la structure C^∞ décrite précédemment s'appelle "La déformation au cône normal associée à l'inclusion $X \subset M$".

Remarque 3.1.5. Soit (M, X) un couple C^∞ comme ci-dessus. Considérons un voisinage tubulaire de X dans M, c'est à dire, on a un voisinage $\mathcal{U}$ de X dans $\mathscr{N}_X^M$ (comme la section nulle), un voisinage $\mathcal{V}$ de X dans M et un difféomorphisme $h : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ qui est l'identité sur X. Dans cette situation on pose $W := \{(x, \xi, t) \in \mathscr{N}_X^M \times \mathbb{R} : (x, t \cdot \xi) \in \mathcal{U}\}$, alors on a un plongement ouvert de W dans $\mathscr{D}_X^M$ donné par l'analogue de l'application ψ de (56), à savoir une application $\psi : W \to \mathscr{D}_X^M$ donnée par la formule suivante

$$\psi(x, \xi, t) = \begin{cases} (x, 0) & \text{si } t = 0 \\ (h(x, t\xi), t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \tag{61}$$

qui est un difféomorphisme sur son image. On obtient ainsi un ouvert de $\mathscr{D}_X^M$, que l'on note W' qui n'est rien d'autre que la déformation au cône normal de X dans $\mathcal{V}$. De plus, $\mathscr{D}_X^M$ peut être recouvert de la façon suivante

$$\mathscr{D}_X^M = W' \bigcup M \times \mathbb{R}^*.$$

Donnons à présent quelques exemples de déformations au cône normal. On va laisser pour la section prochaine l'exemple du groupoïde tangent associé à un groupoïde de Lie. Celui-là jouera un rôle fondamentale dans notre travail, c'est pourquoi on a besoin de l'étudier plus en détail.

Exemple 3.1.6.
1. *Considérons le cas où $X = \emptyset$. On a que*
$$\mathscr{D}_\emptyset^M = M \times \mathbb{R}^*$$
avec la structure C^∞ usuelle de $M \times \mathbb{R}^*$.
2. *Soit $X \subset M$ un sous-ensemble ouvert. Dans ce cas il n'y a pas de déformation. On a que $T_X M \approx TX$, d'où, par définition la déformation au cône normal associée prend la forme suivante*
$$\mathscr{D}_X^M = X \times \mathbb{R} \bigcup M \times \mathbb{R}^*,$$
comme sous-ensemble ouvert de $M \times \mathbb{R}$. En particulier, on peut considérer la Déformation au cône normal $\mathscr{D}_M^M$ qui n'est rien d'autre que $M \times \mathbb{R}$ avec la structure C^∞ usuelle (la structure produit).
3. *Soit $x_0 \in M$. On prend $X = \{x_0\}$. Dans ce cas la Déformation au cône normal associée est par définition*
$$\mathscr{D}_{x_0}^M = T_{x_0} M \times \{0\} \bigsqcup M \times \mathbb{R}^*,$$
c'est à dire, on a une déformation de l'espace M en $T_{x_0} M$.

Remarque 3.1.7 (Restriction à l'intervalle). Soit (M, X) un couple C^∞. On a construit la Déformation au cône normal associé $\mathscr{D}_X^M$. On peut considérer la restriction de $\mathscr{D}_X^M$ à $[0,1]$, c'est à dire, la variété à bord

$$\mathscr{N}_X^M \times 0 \bigsqcup M \times (0,1]. \tag{62}$$

Cette restriction sera très utile pour nous dans ce travail. On va garder la même notation, $\mathscr{D}_X^M$, même s'il s'agit d'une restriction, le contexte sera toujours clair. La raison d'avoir introduit la déformation au cône normal paramétré par $\mathbb{R}$ et non par $[0,1]$ est évidemment parce que il est beaucoup plus facile de travailler avec des variétés sans bord.

3.2. Fonctorialité de la Déformation au cône normal

Dans cette section on va voir que la construction de la variété "Déformation au cône normal" de la section précédente est fonctorielle.

D'abord voyons ce que se passe avec les Déformations au cône normal du type $\mathscr{D}_V^U$ avec $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ouvert et $V = U \cap \mathbb{R}^p$. Soit $U' \subset \mathbb{R}^{p'} \times \mathbb{R}^{q'}$ ouvert et $V' = U' \cap \mathbb{R}^{p'}$
Soit $F : U \to U'$ une application C^∞ avec $F(V) \subset V'$, c'est à dire, F satisfait les conditions de la proposition 3.1.3. Posons $n = p + q$ et $n' = p' + q'$, on définit $\mathscr{D}(F) : \mathscr{D}_V^U \to \mathscr{D}_{V'}^{U'}$ par

$$\mathscr{D}(F)(x,\xi,t) = \begin{cases} (F_1(x,0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x,0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x,\xi), F_2(x,\xi), t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *L'application $\mathscr{D}(F) : \mathscr{D}_V^U \to \mathscr{D}_{V'}^{U'}$ est de classe C^∞.*

Démonstration. Montrer la proposition revient à montrer que la composition

$$\Omega_V^U \xrightarrow{\psi} \mathscr{D}_V^U \xrightarrow{\mathscr{D}(F)} \mathscr{D}_{V'}^{U'} \xrightarrow{\psi'^{-1}} \Omega_{V'}^{U'}$$

est une application C^∞, où Ω_V^U et $\Omega_{V'}^{U'}$ sont comme en (58). Or, par définition

$$\psi'^{-1} \circ \mathscr{D}(F) \circ \psi(x,\xi,t) = \begin{cases} (F_1(x,0), \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(x,0) \cdot \xi, 0) & \text{si } t = 0 \\ (F_1(x,t\xi), \frac{1}{t} F_2(x,t\xi), t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

et alors le résultat se déduit de la proposition 3.1.3. □

Voyons maintenant le cas général. Soit $F : (M, X) \to (M', X')$ un morphisme de couples C^∞, i.e. une application C^∞, $F : M \to M'$, avec $F(X) \subset X'$ on définit $\mathscr{D}(F) : \mathscr{D}_X^M \to \mathscr{D}_{X'}^{M'}$ par les formules

$\mathscr{D}(F)(x,\xi,0) = (F(x), d_N F_x(\xi), 0)$ et

$\mathscr{D}(F)(m,t) = (F(m),t)$ pour $t \neq 0$,

où $d_N F_x$ est par définition l'application

$$(\mathscr{N}_X^M)_x \xrightarrow{d_N F_x} (\mathscr{N}_{X'}^{M'})_{F(x)}$$

induite par $T_x M \xrightarrow{dF_x} T_{F(x)}M'$.
On a la proposition :

Proposition 3.2.2. *L'application $\mathscr{D}(F) : \mathscr{D}_X^M \to \mathscr{D}_{X'}^{M'}$ est de classe C^∞.*

Démonstration. Le seul problème se trouve en $t = 0$. Soit $(x,\xi,0) \in \mathscr{D}_X^M$. Il suffit de considérer un système de coordonnées au tour de $(x,\xi,0)$ du type $\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$ et un système de cordonnées autour de $(F(x), d_N F_x(\xi), 0)$ du type $\mathscr{D}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'}$ et observer que on se ramène ainsi à la proposition 3.2.1. □

Exemple 3.2.3 (Projection). *Soit (M,X) un couple C^∞. Considérons l'application de couples $\iota : (M,X) \to (M,M)$ donnée par l'identité. Posons $p = \mathscr{D}(\iota)$. Par définition on voit que $p : \mathscr{D}_X^M \to M \times \mathbb{R}$ est l'application C^∞ donnée par :*

$$(x,\xi,0) \mapsto (x,0)$$

pour $t = 0$, et

$$(m,t) \mapsto (m,t)$$

pour $t \neq 0$. On aura besoin de cette projection plus tard dans ce travail.

Remarque 3.2.4. Considérons la catégorie $\mathscr{C}_2^\infty$ des couples C^∞, formés d'une variété C^∞ et d'une sous-variété et des morphismes des couples. On vient de voir que la construction de la déformation au cône normal associée à un tel couple C^∞ induit un foncteur $\mathscr{D} : \mathscr{C}_2^\infty \to \mathscr{C}^\infty$, où $\mathscr{C}^\infty$ désigne la catégorie des variétés C^∞.

Pour finir cette section, on va voir une propriété du foncteur $\mathscr{D}$ qui nous sera très utile dans la suite. On le résume dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.5. *Soient (M,X) et (M',X') deux couples C^∞ et $F : (M,X) \to (M',X')$ une application de couples de classe C^∞. Alors*

$$\mathscr{D}(F) : \mathscr{D}_X^M \to \mathscr{D}_{X'}^{M'}$$

est une immersion (resp. une submersion) si et seulement si $F : M \to M'$ et $d_N F : \mathscr{N}_X^M \to \mathscr{N}_{X'}^{M'}$ sont des immersions (resp. des submersions).

Démonstration. En général, si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z' \arrow[d, "\pi'"] \\ Y \arrow[r, "id"'] & Y, \end{tikzcd}$$

où π et π' sont des submersions surjectives. Alors f est une immersion (resp. une submersion) si et seulement si chaque restriction aux fibres est une immersion (resp. une submersion) : en effet, la différentielle de f en chaque point $z \in Z$ définit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_z Z_{\pi(z)} \arrow[r] \arrow[d, "d_z f_z"'] & T_z Z \arrow[r, "d_z \pi"] \arrow[d, "d_z f"'] & T_{\pi(z)} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_{f(z)} Z'_{\pi(z)} \arrow[r] & T_{f(z)} Z' \arrow[r, "d_{f(z)} \pi'"'] & T_{\pi(z)} Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les deux lignes sont des suites exactes courtes d'espaces vectoriels. L'affirmation s'obtient facilement du fait que ces suites sont toujours scindées.

Maintenant, la conclusion de la proposition s'obtient en prenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_X^M \arrow[r, "\mathscr{D}(F)"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{D}_{X'}^{M'} \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "id"'] & \mathbb{R}, \end{tikzcd}$$

qui satisfait évidement la condition ci-dessus. $\square$

Il est donc intéressant de savoir quand $d_N F : \mathscr{N}_X^M \to \mathscr{N}_{X'}^{M'}$ est une immersion (ou une submersion). Or, on peut considérer le diagramme commutatif de fibrés vectoriels induit par F :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & TX \arrow[r] \arrow[d, "dF|_X"'] & T_X M \arrow[r] \arrow[d, "dF"'] & \mathscr{N}_X^M \arrow[r] \arrow[d, "d_N F"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & TX' \arrow[r] & T'_X M' \arrow[r] & \mathscr{N}_{X'}^{M'} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

pour voir que $d_N F$ est une immersion si et seulement si F est une immersion et $X \to M \times_{M'} X'$ est une application étale (en particulier $T_x X \cong T_{(x,F(x))}(M \times_{M'} X')$), et

$d_N F$ est une submersion si et seulement si F et $F|_X$ sont des submersions.

Pour le cas trivial $X = X'$ et $F|_X = id$ on a en particulier que $d_N F$ est une immersion (resp. une submersion) si et seulement si $F : M \to M'$ est une immersion (resp. une submersion). Ainsi, dans ce cas, $\mathscr{D}(F)$ est une immersion (resp. une submersion) si et seulement si F l'est.

Remarque 3.2.6 (Restriction à l'intervalle). Dans la remarque 3.1.7 on a considéré la Déformation au cône normal $\mathscr{D}_X^M$ comme la variété à bord

$$\mathscr{N}_X^M \times 0 \bigsqcup M \times (0,1].$$

Cette restriction à l'intervalle jouie des mêmes propriétés fonctorielles vues jusqu'au maintenant.

3.3. Le groupoïde adiabatique et le groupoïde tangent

Dans cette section on va donner un exemple d'une variété DCN, il s'agit du groupoïde tangent associé à un groupoïde de Lie. Cet exemple sera de grand utilité pour nous dans la suite.

Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. On identifie $\mathscr{G}^{(0)}$ comme sous-ensemble de $\mathscr{G}$ grâce à l'application unité $u : \mathscr{G}^{(0)} \hookrightarrow \mathscr{G}$. On peut donc considérer la variété DCN $\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$. On rappelle du chapitre 2 que $A\mathscr{G} := \mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$ est l'algébroïde de Lie par définition.

Définition 3.3.1 (Groupoïde adiabatique). Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Le groupoïde adiabatique associé à $\mathscr{G}$ est le groupoïde qui a $\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$ comme ensemble de flèches et $\mathscr{G}^{(0)} \times \mathbb{R}$ comme base, avec :

- $s^{ad}(x,\eta,0) = (x,0)$ et $r^{ad}(x,\eta,0) = (x,0)$ en $t = 0$ et $s^{ad}(\gamma,t) = (s(\gamma),t)$ et $r^{ad}(\gamma,t) = (r(\gamma),t)$ en $t \neq 0$.

- La composition est donnée par $m^{ad}((x,\eta,0),(x,\xi,0)) = (x,\eta+\xi,0)$ et $m^{ad}((\gamma,t),(\beta,t)) = (m(\gamma,\beta),t)$ si $t \neq 0$ et si $r(\beta) = s(\gamma)$.

Ainsi, les applications unité et inverse sont données par

- $u^{ad} : \mathscr{G}^{(0)} \to \mathscr{G}^{ad}$ par $u^{ad}(x,0) = (x,0,0)$ et $u^{ad}(x,t) = (u(x),t)$ si $t \neq 0$ et

- $\iota^{ad} : \mathscr{G}^{ad} \to \mathscr{G}^{ad}$ par $\iota^{ad}(x,\xi,0) = (x,-\xi,0)$ et $\iota^{ad}(\gamma,t) = (\iota(\gamma),t)$.

On notera souvent $\mathscr{G}^{ad} = \mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}} := A\mathscr{G} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G} \times (0,1]$.

Proposition 3.3.2. *Si on considère $\mathscr{G}^{ad}$ muni de la structure C^∞ comme dans la section précédente, alors le groupoïde adiabatique est un groupoïde de Lie.*

DÉMONSTRATION. Regardons la Déformation au cône normal $\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}}$, où $\mathscr{G}^{(0)} \hookrightarrow \mathscr{G}^{(2)}$ par $x \mapsto (x,x)$. Celle-ci est par définition

$$\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}} = \mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G}^{(2)} \times \mathbb{R}^*$$

Considérons les applications $p_s : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(2)} : \gamma \mapsto (\gamma, s(\gamma))$ et $p_r : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(2)} : \gamma \mapsto (r(\eta), \eta)$. Autrement dit $p_s = (id_{\mathscr{G}}, u \circ s)$ et $p_r = (u \circ r, id_{\mathscr{G}})$. Par définition on a

$$m \circ p_s = id_{\mathscr{G}} = m \circ p_r. \tag{63}$$

Les applications p_s et p_r sont des applications de couples entre $(\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)})$ et $(\mathscr{G}^{(2)}, \mathscr{G}^{(0)})$ qui induissent donc des applications $d_N p_s, d_N p_r$ de $\mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$ en $\mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}}$. Or, $\mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}}$ s'idéntifie canoniquement à $\mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}} \times_{\mathscr{G}^{(0)}} \mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$ (le foncteur $\mathscr{N}$ preserve les produits fibrés). Sous cette idéntification $d_N p_s$ est l'inclusion $X \hookrightarrow (X,0)$ et $d_N p_r$ l'inclusion $Y \hookrightarrow (0,Y)$. Maintenant, de l'équation (63) on déduit que $d_N m \circ d_N p_s = id_{\mathscr{N}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}} = d_N m \circ d_N p_r$, et alors $d_N m$ s'écrit explicitement par

$$d_N m(X,Y) = X + Y.$$

Ceci implique que $\mathscr{D}(m) : \mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}} \to \mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}}$ s'écrit comment

$$\mathscr{D}(m)(x,(X,Y),0) = (x, X+Y, 0)$$

et

$$\mathscr{D}(m)((\gamma,\eta),t) = (\gamma \circ \eta, t) \text{ pour } t \neq 0,$$

d'où on voit que $\mathscr{D}(m) = m^{ad}$. On conclut, grâce à la proposition 3.2.2, que le produit dans le groupoïde adiabatique est C^∞.

Il est évident par définition que $s^{ad} = \mathscr{D}(s) : \mathscr{G}^{ad} \to \mathscr{G}^{(0)} \times \mathbb{R}$, $r^{ad} = \mathscr{D}(r)$, $u^{ad} = \mathscr{D}(u)$ et $\iota^{ad} = \mathscr{D}(\iota)$, où on voit $\mathscr{G}^{(0)} \times \mathbb{R}$ comme $\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(0)}}$ et

$$s, r : (\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)}) \to (\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{G}^{(0)}),$$

$$u : (\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{G}^{(0)}) \to (\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)})$$

et

$$\iota : (\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)}) \to (\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)})$$

comme des applications de couples C^∞. De plus, s^{ad} et r^{ad} sont bien des submersions, par la proposition 3.2.5. □

Modulo l'identification de (45) on peut poser

$$\mathscr{G}^{ad} = T_s\mathscr{G}|_{\mathscr{G}^{(0)}} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G} \times \mathbb{R}^*$$

qui est la répresentation la plus courante du groupoïde adiabatique.

On définit à présent le groupoïde tangent associé à un groupoïde de Lie.

DÉFINITION 3.3.3 (Groupoïde tangent). Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Le groupoïde tangent de $\mathscr{G}$ est la restriction du groupoïde adiabatique à l'intervalle $[0,1]$. On le dénote par $\mathscr{G}^T$ et par définition il prend la forme suivante

$$\mathscr{G}^T := A\mathscr{G} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G} \times (0,1]. \tag{64}$$

On finit cette section par quelques exemples de groupoïdes tangents.

EXEMPLE 3.3.4. *1. Le groupoïde tangent d'un groupe : Soit G un groupe. On considère le groupoïde associé $G \rightrightarrows \{e\}$ comme dans le chapitre précédent. Par définition $AG = T_eG$, c'est à dire, que l'algébroïde de Lie dans ce cas est justement l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G. Alors, le groupoïde tangent est*

$$G^T := \mathfrak{g} \times \{0\} \bigsqcup G \times (0,1],$$

et sa topologie est donnée comme dans l'exemple 2. *en 3.1.6. On a donc une déformation du groupe G en son algèbre de Lie.*

2. Le groupoïde tangent d'un fibré vectoriel : Soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel au-dessus d'un espace X. On considère le groupoïde associé $E \rightrightarrows X$ comme dans le chapitre précédent. Alors l'algébroïde de Lie est précisément le fibré E au-dessus de X et le groupoïde tangent est égal à $E \times [0,1] \rightrightarrows X \times [0,1]$.

3. Le groupoïde tangent d'une variété C^∞ : Soit M une variété C^∞. On considère le groupoïde produit associé $M \times M \rightrightarrows M$. Dans ce cas l'algébroïde de Lie s'identifie à TM et le groupoïde tangent, noté par $\mathscr{G}_M$, prend la forme

$$\mathscr{G}_M = TM \times \{0\} \bigsqcup M \times M \times (0,1].$$

Le groupoïde tangent d'une variété a été introduit par Alain Connes et il lui a permis de donner une preuve très conceptuelle du théorème de Atiyah-Singer.

4. Le groupoïde de Thom : Soit $N \xrightarrow{p} T$ un fibré vectoriel au-dessus d'un espace localement compact T. Considérons le groupoïde produit au-dessus de T (exemple 2.1.8),

$$N \times_T N \rightrightarrows N. \tag{65}$$

L'algébroïde de ce groupoïde est le fibré vectoriel $N \oplus N$ au dessus de N, c'est à dire, comme ensemble $N \oplus N$ est précisément $N \times_T N$, mais on le considère avec la structure vectoriel en la deuxième coordonnée *par exemple. Alors le groupoïde tangent, que l'on dénote par $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$, prend la forme*

$$\mathscr{G}_{\mathscr{T}} = N \oplus N \times \{0\} \bigsqcup N \times_T N \times (0,1].$$

On appelle ce groupoïde tangent, le groupoïde de Thom (voir [**DLN06**] *pour une motivation de ce nom). On verra plus tard comme il intervient dans la théorie de l'indice pour les groupoïdes de Lie.*

3.4. Théorie de l'indice et déformations

Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. On sait du chapitre précédent que l'on a un morphisme

$$K^0(A^*\mathscr{G}) \xrightarrow{ind_a} K_0(C_r^*(\mathscr{G})),$$

appelé l'indice analytique de $\mathscr{G}$. Ce morphisme a été défini à l'aide du calcul pseudodifférentiel sur le groupoïde. Il existe cependant une façon de définir ce même morphisme qui n'a pas besoin de passer par le calcul pseudodifférentiel, en utilisant le groupoïde tangent [**MP97**]. Rappelons que le groupoïde tangent est par définition

$$\mathscr{G}^T := A\mathscr{G} \times \{0\} \bigsqcup \mathscr{G} \times (0,1],$$

et il est un groupoïde de Lie compatible avec les structures des groupoïdes de Lie de $A\mathscr{G}$ et de $\mathscr{G}$. On peut prendre l'algèbre de convolution associée $C_c^\infty(\mathscr{G}^T)$, et encore plus, considérer les évaluations

$$C_c^\infty(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_0} C_c^\infty(A\mathscr{G}) \text{ et}$$

$$C_c^\infty(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_t} C_c^\infty(\mathscr{G}) \text{ pour } t \neq 0.$$

Ces évaluations sont des morphismes d'algèbres. Il est facile de montrer que ces morphismes se prolongent aux C^*-algèbres, c'est à dire, on a

$$C_r^*(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_0} C_r^*(A\mathscr{G}) \text{ et}$$

$$C_r^*(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_t} C_r^*(\mathscr{G}) \text{ pour } t \neq 0.$$

De plus, puisque $\mathscr{G} \times (0,1]$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathscr{G}^T$ saturé et $A\mathscr{G}$ un sous-ensemble fermé, également saturé, on a une suite exacte courte

$$0 \to C_r^*(\mathscr{G} \times (0,1]) \longrightarrow C_r^*(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{ev_0} C_r^*(A\mathscr{G}) \to 0. \tag{66}$$

Ce n'est pas à priori vrai qu'avec C_{max}^*. Cependant, $A\mathscr{G}$ est un groupoïde moyennable, ce qui permet d'avoir la suite pour les C^* réduites. Or, la C^*-algèbre $C_r^*(\mathscr{G} \times (0,1]) \cong C_0((0,1], C_r^*(\mathscr{G}))$ est contractible puisque l'intervalle $(0,1]$ l'est. Ceci implique en particulier que les groupes de K-théorie $K_i(C_r^*(\mathscr{G} \times (0,1]))$ sont nuls, pour $i = 0,1$. Alors, lorsque on applique le foncteur de K-théorie à la suite exacte ci-dessus et en utilisant la suite exacte à six termes qui en résulte, on obtient que

$$K_i(C_r^*(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{(ev_0)_*} K_i(C_r^*(A\mathscr{G}))$$

est un isomorphisme, pour $i = 0, 1$. Dans [**MP97**], Monthubert-Pierrot montrent que

$$ind_a = (ev_1)_* \circ (ev_0)_*^{-1}, \tag{67}$$

modulo l'isomorphisme de Fourier qui identifie $C_r^*(A\mathscr{G}) \cong C_0(A^*\mathscr{G})$ (voir aussi [**HS87**] et [**NWX99**]). Mis dans un diagramme commutatif, on a

$$\begin{tikzcd} K_i(C_r^*(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "(ev_0)_*", "\cong"'] \arrow[d, "(ev_1)_*"'] & K^i(A^*\mathscr{G}) \arrow[dl, "ind_a"] \\ K_i(C_r^*(\mathscr{G})) & \end{tikzcd}.$$

Voyons un exemple d'indice analytique.

Exemple 3.4.1. *Considérons la situation de l'exemple* 4. *de 3.3.4. On a un fibré vectoriel (réel en principe) $N \to T$, et en particulier ceci implique que $N \oplus N \to T$ est un fibré vectoriel complexe au-dessus de T. L'indice analytique du groupoïde (65) est un morphisme*

$$K^0(N \oplus N^*) \overset{ind_a}{\to} K_0(C_r^*(N \times_T N)).$$

Or, le groupoïde $N \times_T N$ est Morita équivalent au groupoïde (trivial) T. Maintenant, on montre que, modulo Morita, l'indice analytique de $N \times_T N$ est l'inverse de l'isomorphisme de Thom (voir par exemple [**Con94**] *II.5 ou* [**DLN06**] *théorème 6.2)*

$$K^0(T) \xrightarrow{Thom} K^0(N \oplus N^*).$$

Ce fait justifie ainsi le nom du groupoïde tangent qui réalise cet indice comme en (67), à savoir le groupoïde de Thom.

On peut aussi parler en termes de KK-théorie : de la suite exacte (66) on obtient un élément inversible $e_0 \in KK(\mathscr{G}^T, A\mathscr{G})$. L'indice analytique peut être regardé comme l'élément de KK-théorie $e_0^{-1} \otimes_{\mathscr{G}^T} e_1 \in KK(A\mathscr{G}, \mathscr{G})$. Or, des éléments de KK-théorie construits comme ci-dessus en utilisant de groupoïdes de déformation avaient déjà apparu dans le travail de Hilsum-Skandalis, [**HS87**], sur la fonctorialité dans le mauvais sens en théorie de Kasparov. La situation est la suivante : Soient $\mathscr{G}_i \rightrightarrows \mathscr{G}_i^{(0)}$, $i = 1, 2$ deux groupoïdes de Lie et $\varphi : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ un morphisme de groupoïdes (généralisé). La question est de savoir dans quelle cas il est possible d'associer un élément $\varphi! \in KK(\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2)$. Dans le cas où φ est une immersion, injective, K-orientée de groupoïdes étales, la déformation au cône normal associée à cette immersion a permis de construire l'élément d'indice désiré.

On va finir ce chapitre avec un exemple montrant comment les groupoïdes de déformation peuvent servir à établir des théorèmes d'indice.

Exemple 3.4.2. *Pour cet exemple on va suivre Debord-Lescure-Nistor,* [**DLN06**]. *Soit* M *une variété compacte. On note par* $\mathscr{G}_M := M \times M \rightrightarrows M$ *le groupoïde produit associé à* M. *Soit* $V \xrightarrow{p} M$ *un fibré vectoriel. Notons par* $\pi : TM \to M$ *la projection et posons* $N := \pi^*(V)$ *et* $X := TM$. *Considérons l'exemple 4. de 3.3.4 :* $N \times_X N \rightrightarrows N$ *et son groupoïde tangent* $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$. *Or, l'inclusion* $N \times_X N \overset{\iota}{\hookrightarrow} N \times N$ *induit une immersion injective* $\mathscr{D}(\iota) : \mathscr{G}_{\mathscr{T}} \to \mathscr{G}_N^T$. *Soit*

$$\mathscr{A} \rightrightarrows N \times [0,1] \times [0,1]$$

le groupoïde tangent associé à $\mathscr{D}(\iota)$. *Le groupoïde* $\mathscr{A}$ *devient ainsi un groupoïde de Lie de déformation paramétré par le carré* $[0,1] \times [0,1]$. *Si on note les coordonnées du carré par* (s,t), *on peut considérer les évaluations* $s = 0,1$ *et* $t = 0,1$ *pour obtenir*

- $\mathscr{A}|_{s=0} = N \oplus N \times [0,1]$,
- $\mathscr{A}|_{s=1} = N \times_X N \times \{0\} \bigsqcup N \times N \times (0,1]$,
- $\mathscr{A}|_{t=0} = \mathscr{G}_{\mathscr{T}}$ *et*
- $\mathscr{A}|_{t=1} = \mathscr{G}_N^T$.

Chaque un de ces groupoïdes définit (modulo équivalence de Morita) un morphisme d'indice comme en (67) :

- $\mathscr{A}|_{s=0}$ *définit l'identité en* $K^0(TV)$.
- $\mathscr{A}|_{s=1}$ *définit l'indice analytique de* M, $ind_a^M : K^0(TM) \to \mathbb{Z}$.
- $\mathscr{A}|_{t=0}$ *définit l'inverse de l'isomorphisme de Thom*

$$K^0(TV) \overset{Thom^{-1}}{\longrightarrow} K^0(TM).$$

- $\mathscr{A}|_{t=1}$ *définit l'indice analytique de* V, $ind_a^V : K^0(TV) \to \mathbb{Z}$.

Or, il est évident que les évaluations commutent, par exemple, $\mathscr{A}|_{s=0}|_{t=1} = \mathscr{A}|_{t=1}|_{s=0}$. *Alors, la compatibilité de l'indice de* V *et l'indice de* M *via l'isomorphisme de Thom est montré de manière immédiate. Ceci montre le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer d'une façon très simple.*

CHAPITRE 4

Une Algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent

Dans ce chapitre on va définir une algèbre de fonctions C^∞ sur le groupoïde tangent qui nous servira dans le chapitre prochain à définir les indices analytiques d'ordre fini pour un groupoïde de Lie. L'algèbre en question sera un champ d'algèbres sur l'intervalle $[0,1]$ dont la fibre en zéro est l'algèbre de Schwartz sur l'algébroïde, tandis que les fibres en dehors du zéro sont toutes égales à l'algèbre de convolution des fonctions C^∞ à support compact sur le groupoïde.

On va commencer par définir les espaces de Schwartz pour des fibrés vectoriels. Le cas particulier qui nous intéresse est l'algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie.

4.1. Le cas des fibrés vectoriels

Soit $E \overset{\pi}{\longrightarrow} X$ un fibré vectoriel (réel) au-dessus d'une variété de classe C^∞. Dans cette section on va définir un espace de fonctions à décroissance rapide sur E. Commençons localement : Soit $V \subset \mathbb{R}^p$ un sous-ensemble ouvert, on note par $\mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$ l'ensemble des fonctions $g \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^q)$ telles que :

(s_1) $\forall K \subset V$ sous-ensemble compact et $\forall k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^p$ et $\alpha \in \mathbb{N}^q$, il existe $C > 0$ (qui dépend de K et k, l, α) tel que

$$(1 + \|\xi\|^2)^k \|\partial_x^l \partial_\xi^\alpha g(x,\xi)\| \leq C$$

$\forall x \in K$.

Remarque 4.1.1. Avec notre définition, considérons $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. Cet espace n'est pas l'espace classique de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+q})$. Ici, la structure vectorielle de la partie correspondante à $\mathbb{R}^p$ n'est pas prise en compte, on regarde uniquement l'aspect topologique. Cependant, si on prend $x \in \mathbb{R}^p$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, alors l'application $\xi \mapsto g(x,\xi)$ est bien dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^q)$. En fait, on a une intégration

$$I : \mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_1+q_2}) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_1}) \tag{68}$$

qui consiste à intégrer sur la coordonnée correspondante à $\mathbb{R}^{q_2}$.

On veut montrer que notre définition de $\mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$ peut être utilisée pour définir une algèbre de Schwartz pour un fibré vectoriel en général. Pour cela on a besoin de montrer les deux résultats suivants.

PROPOSITION 4.1.2. *Soit $A : V \to GL(q)$ une application C^∞. Pour $g \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^q)$ on pose $g_A \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^q)$ donnée par $g_A(x,\xi) = g(x, A(x) \cdot \xi)$. Si $g \in \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$ alors $g_A \in \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$ et cette correspondance $g \mapsto g_A$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q) \to \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$.*

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que $g_A \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^q)$. Vérifions qu'elle satisfait la propriété (s_1). Soient $\alpha \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$, $k \in \mathbb{N}$ et $K \subset V$ un sous-ensemble compact. Posons $z = (x,\xi)$ et $u = (x, A(x) \cdot \xi)$, on veut majorer des expressions du type

$$\|\xi\|^k |\partial_z^\alpha g_A(z)|$$

Or, par récurrence sur $|\alpha|$ on peut montrer facilement que $\partial_z^\alpha g_A(z)$ peut s'écrire comme

$$\partial_z^\alpha g_A(z) = \sum_{|\beta| \le |\alpha|} P_\beta(z) \partial_u^\beta g(u),$$

où les $P_\beta(z)$ sont des sommes finies des produits de la forme

$$\partial_x^{\gamma_1} a_{i_1 j_1}(x) \cdots \partial_x^{\gamma_r} a_{i_r j_r}(x) \cdot \xi^\delta, \tag{69}$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$, $\gamma_l \in \mathbb{N}^p$ et $\delta \in \mathbb{N}^q$. C'est clair que l'expression (69) peut être majorée sur K par $C \cdot \|\xi\|^{|\delta|}$, pour une constante $C > 0$. Alors on peut trouver des constantes $C_\beta > 0$ telles que

$$|P_\beta(z)| \le C_\beta \cdot \|\xi\|^{|\delta_\beta|}.$$

On utilise le fait que $A(x) \in GL(q)$ (et donc $\|A(x) \cdot \xi\| \sim \|\xi\|$ sur un compact) pour voir que

$$\|\xi\|^k |\partial_z^\alpha g_A(z)| \le \sum_{|\beta| \le |\alpha|} C'_\beta \cdot \|A(x) \cdot \xi\|^{k + |\delta_\beta|} \partial_u^\beta g(u).$$

Il ne reste qu'à utiliser la propriété (s_1) de g pour trouver une constante $C_{k,\alpha} > 0$ telle que

$$\|\xi\|^k |\partial_z^\alpha g_A(z)| \le C,$$

$\forall x \in K$. □

Il résulte de la proposition précédente que la définition que l'on a donnée de $\mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$ est invariante sous l'action d'une matrice inversible en la direction de $\mathbb{R}^q$. On va voir à présent que elle est aussi invariante par difféomorphismes en la direction horizontale :

PROPOSITION 4.1.3. *Soit $\phi : V \to V'$ un difféomorphisme entre deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^p$. Soit $g \in \mathscr{S}(V' \times \mathbb{R}^q)$, alors $\tilde{g} := g \circ (\phi \times id_{\mathbb{R}^q}) \in \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$,$l \in \mathbb{N}^p$,$\alpha \in \mathbb{N}^q$ et $K \subset V$ un sous-ensemble compact. D'abord, on peut facilement montrer par récurrence la formule suivante :

$$\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \tilde{g}(x,\xi) = \sum_{|\beta| \leq |l|} \phi_\beta(x)(\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha g)(\phi(x),\xi)$$

où les ϕ_β sont des sommes finies de produits de dérivées partielles de ϕ. Alors on voit que

$$\|\xi\|^k |\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \tilde{g}(x,\xi)| \leq \sum_{|\beta| \leq |l|} (sup_K |\phi_\beta(x)|) \cdot \|\xi\|^k |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha g(\phi(x),\xi)|.$$

Finalement, on utilise la propriété (s_1) de g pour conclure. □

On est prêts à définir un espace de Schwartz pour un fibré vectoriel au-dessus d'une variété C^∞. Avant, encore un peu plus de notation. Soit X une variété C^∞ et $(\mathcal{V},\phi)$ une carte, *i.e.* on a un difféomorphisme $\phi : \mathcal{V} \to V \subset \mathbb{R}^p$. On note dans ce cas

$$\mathscr{S}(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^q) = \{g \in C^\infty(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^q) : g \circ (\phi^{-1} \times id_{\mathbb{R}^q}) \in \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)\}$$

Définition 4.1.4. [Schwartz pour des fibrés vectoriels] Soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel. On peut définir, grâce aux propositions précédentes, un ensemble de fonctions que l'on va noter par $\mathscr{S}_c(E)$ et qui consiste de fonctions $g \in C^\infty(E)$ telles que :

(s_1') Il existe $K \subset X$ sous-ensemble compact tel que $g(x,\xi) = 0$, $\forall x \notin K$. On dit que g a support horizontal K.

(s_2') $\forall (\mathcal{V},\tau)$ trivialisation, on a que l'application $g_\tau \in C^\infty(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^q)$ définie par

$$g_\tau(x,\xi) = (g \circ \tau)(x,\xi)$$

appartient à $\mathscr{S}(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^q)$. Ici, la trivialisation se représente par un isomorphisme de fibrés

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{V}) \arrow[d, "\pi"] & V \times \mathbb{R}^q \arrow[l, "\approx", "\tau"'] \arrow[d, "p_1"] \\ \mathcal{V} & V. \arrow[l, "\approx"'] \end{tikzcd}$$

La première observation est que pour le cas où $E = X \times \mathbb{R}^q \to X$ (fibré trivial), $\mathscr{S}_c(X \times \mathbb{R}^q) = C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q))$ (voir [**Trè67**]).

Remarque 4.1.5. Un argument de partition de l'unité permet de voir facilement que si l'on se donne un recouvrement de X, $\{(\mathcal{V}_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$, par des cartes trivialisantes alors on a une décomposition du type

$$\mathscr{S}_c(E) = \sum_{\alpha} \mathscr{S}_c(\mathcal{V}_\alpha \times \mathbb{R}^q). \tag{70}$$

Ce que l'on veut dire plus précisément par l'écriture précédente c'est que si $f \in \mathscr{S}_c(E)$ alors il existent $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Delta$ et $f_{\alpha_j} \in \mathscr{S}_c(\mathcal{V}_{\alpha_j} \times \mathbb{R}^q)$, $j = 1, ..., k$ t.q.

$$f = f_{\alpha_1} \circ \tau_{\alpha_1}^{-1} + ... + f_{\alpha_k} \circ \tau_{\alpha_k}^{-1}.$$

Remarque 4.1.6. $\mathscr{S}_c(E)$ est un $C^\infty(X)$-module : dans le cas où E est défini par un projecteur $p \in M_q(C^\infty(M))$, alors $\mathscr{S}_c(E) = p(C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q)))$. Sinon, on peut utiliser la décomposition (70) ci-dessus.

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel lisse. Supposons que l'on a un système de mesures lisses μ_x sur les fibres E_x qui soient invariantes par translation. Autrement dit, E définit un groupoïde de Lie comme dans le chapitre 1, et notre hypothèse est juste que l'on a un système de Haar pour ce groupoïde. Alors on peut considérer un produit de convolution sur $\mathscr{S}_c(E)$ donné par : Pour $f, g \in \mathscr{S}_c(E)$, on pose

$$(f * g)(x, \xi) = \int_{E_x} f(x, \xi - \eta) g(x, \eta) d\mu_x(\eta)$$

On peut utiliser l'intégration (68) pour voir que ce produit est bien défini. En effet, localement : l'application $(x, \xi, \eta) \mapsto f(x, \xi - \eta)g(x, \eta)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+q})$ est son intégrale appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$. Ainsi on obtient une algèbre associative $(\mathscr{S}_c(E), *)$ qui contient comme sous-algèbre à l'algèbre de convolution du groupoïde $E \rightrightarrows X$, c'est à dire, $C_c^\infty(E)$. On a le résultat suivant, qui est très connu pour des espaces vectoriels.

Proposition 4.1.7. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel lisse au-dessus d'une variété C^∞. L'algèbre $(\mathscr{S}_c(E), *)$ est isomorphe à l'algèbre $(\mathscr{S}_c(E^*), \cdot)$, où $\cdot$ dénote le produit ponctuel.*

Démonstration. Supposons d'abord que $E = X \times \mathbb{R}^q$ est trivial. Dans ce cas $\mathscr{S}_c(E) = C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q))$. Soit $g \in C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q))$ et $X \in \mathbb{R}^q$. On pose

$$\mathscr{F}(g)(x)(X) = \int_{\mathbb{R}^q} e^{-iX\cdot\eta} g(x, \eta) d\eta$$

ceci est la transformée de Fourier de $g(x)$ évaluée en X et elle définit un élément de $C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q))$. Or, comme le produit en $\mathscr{S}_c(E)$ est donné par

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x),$$

on a, grâce à la continuité de la transformée de Fourier, que $\mathscr{F}$ définit un isomorphisme $(C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q)), *) \cong (C_c^\infty(X, \mathscr{S}(\mathbb{R}^q)), \cdot)$.

Maintenant, pour le cas général, la représentation de $\mathscr{S}_c(E)$ comme en (70) nous dit que Fourier définit aussi dans ce cas un isomorphisme

$$\mathscr{F} : (\mathscr{S}_c(E), *) \to (\mathscr{S}_c(E^*), \cdot).$$

$\square$

PROPOSITION 4.1.8. *L'algèbre $\mathscr{S}_c(E)$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_0(E^*)$. En particulier,*

$$K^0(E^*) \cong K_0(\mathscr{S}_c(E)).$$

DÉMONSTRATION. Soit $g \in \mathscr{S}_c(E)$. On doit montrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec $f(0) = 0$, alors $f \circ g \in \mathscr{S}_c(E)$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ [1] avec $f(0) = 0$, on va voir que $f \circ g$ satisfait les deux propriétés de la définition 4.1.4 :

(s'_1) : Soit K le support horizontal de g. Si $x \in K$, on a $f(g(x,\xi)) = f(0) = 0$. On a ainsi que K est aussi le support horizontal de $f \circ g$.

(s'_2) : Cette condition est locale, en particulier on peut supposer $E = V \times \mathbb{R}^q$ avec $V \subset \mathbb{R}^p$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$ et $K \subset V$ un sous-ensemble compact. Posons $z = (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^q$ et $u = g(x,\xi)$. On peut montrer par récurrence que la dérivée $\partial_z^{|\alpha|}(f \circ g)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\partial_z^{|\alpha|}(f \circ g) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \partial_u^{|\beta|} f(u) P_\beta(z),$$

où chaque $P_\beta(z)$ est une somme finie de produits de la forme

$$\partial_z^{\gamma_1} g(z) \cdots \partial_z^{\gamma_r} g(z),$$

avec $|\gamma_1| + ... + |\gamma_r| = |\beta|$. Or, grâce à la propriété (s_1) pour g, chaque $\partial_u^{|\beta|} f(u)$ est bornée pour $x \in K$. La conclusion est maintenant immédiate en utilisant que $g \in \mathscr{S}(V \times \mathbb{R}^q)$. $\square$

4.2. Un espace de Schwartz pour une Déformation au cône normal

Soit M une variété C^∞, X une sous-variété et soit $\mathscr{D}_X^M$ la Déformation au cône normal associée. Dans cette section on va définir un espace de fonctions C^∞ sur $\mathscr{D}_X^M$, noté $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$. Cet espace est un champ d'espaces vectoriels sur l'intervalle fermé $[0,1]$, dont les fibres sont

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{N}_X^M) \text{ en } t = 0, \text{ et}$$

$$C_c^\infty(M) \text{ pour } t \neq 0.$$

Avant, voyons ce qui se passe localement. Pour cela on donnera la définition suivante :

[1] On n'a pas vraiment besoin pour la preuve que f soit holomorphe.

Définition 4.2.1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un sous-ensemble ouvert. On pose $V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

(1) Soit $K \subset U \times [0,1]$ un sous-ensemble compact. On dira que K est un compact conique de $U \times [0,1]$ relatif à V si

$$K_0 = K \cap (U \times \{0\}) \subset V.$$

(2) Soit $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ (où $\Omega_V^U = \{(x,\xi,t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} : (x, t\xi) \in U\}$ est comme en (58) du chapitre précédent). On dira que g est à support conique compact, s'il existe un compact conique K de $U \times [0,1]$ relatif à V tel que si $t \neq 0$ et $(x, t\xi, t) \notin K$ alors $g(x,\xi,t) = 0$.

(3) On note par $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$ l'ensemble des applications $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ qui sont à support conique compact et qui satisfont la condition suivante :

(r_1) $\forall\ k, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^p$ et $\alpha \in \mathbb{N}^q$ il existe $C_{(k,m,l,\alpha)} > 0$ tel que

$$(1 + \|\xi\|^2)^k \|\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \partial_t^m g(x,\xi,t)\| \leq C_{(k,m,l,\alpha)}$$

On va voir que cet ensemble $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$ est invariant par difféomorphismes. Pour cela considérons $F : U \to U'$ un difféomorphisme C^∞ où $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $U' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ sont des sous-ensembles ouverts. On suppose que $F = (F_1, F_2)$ satisfait $F_2(x, 0) = 0$ (F satisfait les conditions du lemme 3.1.2). On a ainsi un difféomorphisme C^∞, $\tilde{F} : \Omega_V^U \to \Omega_{V'}^{U'}$, où on rappelle que $\Omega_V^U = \{(x,\xi,t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} : (x, t\xi) \in U\}$ et

$$\tilde{F}(x,\xi,t) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x,0) \cdot \xi & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t} F(x, t\xi) & \text{si } t \neq 0, \end{cases}$$

(voir 3.1.3). On a la proposition suivante :

Proposition 4.2.2. *Soit $g \in \mathscr{S}_c(\Omega_{V'}^{U'})$, alors $\tilde{g} := g \circ \tilde{F} \in \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$.*

Démonstration. La première chose c'est que $\tilde{g} \in C^\infty(\Omega_V^U)$ grâce au lemme 3.1.2.

Soit $K' \subset U' \times [0,1]$ le support conique compact de g. Posons

$$K = (F^{-1} \times id_{[0,1]}(K')) \subset U \times [0,1].$$

C'est un compact conique de $U \times [0,1]$ relatif à V et $\tilde{g}(x,\xi,t) = 0$ si $t \neq 0$ et $(x, t\xi, t) \notin K$, c'est à dire, $\tilde{g}$ est à support conique compact K.

Vérifions maintenant la propriété (r_1) de décroissance rapide :

On veut trouver des bornes aux expressions du type

$$\|\xi\|^k \|\partial_z^\alpha \tilde{g}(z)\|,$$

où $z = (x,\xi,t)$; et pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}$ arbitraires.
On va noter,
$F_1(x,\xi) = (A_1(x,\xi), ..., A_p(x,\xi))$ et
$F_2(x,\xi) = (B_1(x,\xi), ..., B_q(x,\xi))$.
Avec la notation du chapitre précédent on note aussi

$w = w(x,\xi,t) = (A_1(x,t\xi),...,A_p(x,t\xi))$ et
$\eta = \eta(x,\xi,t) = (\tilde{B}_1(x,\xi,t),...,\tilde{B}_q(x,\xi,t))$ où $\tilde{B}_j$ est comme dans la section précédente, $i.e.$,

$$\tilde{B}_j(x,\xi,t) = \begin{cases} \frac{\partial B_j}{\partial \xi}(x,0)\cdot\xi & \text{si } t=0 \\ \\ \frac{1}{t}B_j(x,t\xi) & \text{si } t\neq 0 \end{cases}$$

En particulier on a par définition $\tilde{F}(x,\xi,t) = (w,\eta,t)$, ou $\tilde{F}(z) = u$, si l'on écrit $u = (\omega,\eta,t)$.

Or, on est uniquement intéressés à ce qui se passe dans l'ensemble $K_\Omega = \{z = (x,\xi,t)\in\Omega : (x,t\cdot\xi,t)\in K\}$ car en dehors de cet ensemble g est nulle. Pour un point $z = (x,\xi,t)\in K_\Omega$ on a que $(x,t\cdot\xi)$ est dans un ensemble compact et donc on déduit que les expressions

$$\|\partial_z^\gamma\omega_i(z)\|$$

sont bornés en K_Ω. Pour les expressions $\|\partial_z^\delta\eta_j(z)\|$ on développe d'abord comme dans la preuve du lemme 3.1.2, c'est à dire,

$$\eta_j(x,\xi,t) = (\frac{\partial B_j}{\partial\xi}(x,0)\cdot\xi + h^j(x,t\xi))\cdot\xi. \tag{71}$$

Maintenant, comme on ne considère que des point en K_Ω, il est immédiat que l'on peut trouver des constants $C_j>0$ tel que

$$\|\partial_z^\delta\eta_j(z)\| \leq C_j\cdot\|\xi\|^{m_\delta}.$$

Une récurrence immédiate sur $|\alpha|$ montre que les dérivées $\partial_z^\alpha\tilde{g}(z)$ sont de la forme

$$\partial_z^\alpha\tilde{g}(z) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} P_\beta(z)\partial_u^\beta g(u),$$

où $P_\beta(z)$ est une somme finie de produits de la forme

$$\partial_z^\gamma\omega_i(z)\cdot\partial_z^\delta\eta_j(z).$$

Alors, on peut trouver des constantes $C_\beta>0$ telles que

$$\|P_\beta(z)\| \leq C_\beta\cdot\|\xi\|^{|\mathrm{k}_\beta|}.$$

On a ainsi

$$\|\xi\|^k\|\partial_z^\alpha\tilde{g}(z)\| \leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} C_\beta\cdot\|\xi\|^{|\mathrm{k}_\beta|}\partial_u^\beta g(u).$$

Or, on peut appliquer (71) à F^{-1} pour avoir des constantes C_i tel que

$$\|\xi_i(\omega,\eta,t)\| \leq C_i\cdot\|\eta\|$$

sur K_Ω. On peut mettre les deux inégalités précédentes ensembles pour avoir

$$\|\xi\|^k \|\partial_z^\alpha \tilde{g}(z)\| \leq \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C'_\beta \cdot \|\eta\|^{|\mathrm{k}_\beta + |k|} \partial_u^\beta g(u).$$

Il ne reste qu'à utiliser la propriété (s_1) de g pour trouver $C > 0$ tel que

$$\|\xi\|^k \|\partial_z^\alpha \tilde{g}(z)\| \leq C$$

Cela conclut la preuve. □

On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.3. *Soit $F : U \to U'$ un difféomorphisme comme ci-dessus. Alors $\tilde{F}^* : \mathscr{S}_c(\Omega_{V'}^{U'}) \to \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

On est prêts pour donner la définition principale de cette section. Avant, rappelons que on a une projection C^∞ $P_{\mathscr{D}} : \mathscr{D}_X^M \to M \times [0,1]$ vue dans l'exemple 3.2.3 du chapitre précédent, elle est donnée par les formules :

$$(x, \xi, 0) \mapsto (x, 0)$$

pour $t = 0$, et

$$(m, t) \mapsto (m, t)$$

pour $t \neq 0$.

Définition 4.2.4. Soit $g \in C^\infty(\mathscr{D}_X^M)$.

(a) On dira que g est à support conique compact, s'il existe

$$K \subset M \times [0,1]$$

un sous-ensemble compact avec $K_0 := K \cap (M \times \{0\}) \subset X$ (compact conique relatif à X) tel que si $t \neq 0$ et $(m,t) \notin K$ alors $g(m,t) = 0$.

(b) On dira que g est à décroissance rapide en zéro si pour toute $(\mathcal{U}, \phi)$ carte adaptée relative à X et pour toute $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U} \times [0,1])$, l'application $g_\chi \in C^\infty(\Omega_V^U)$ donnée par

$$g_\chi(x, \xi, t) = (g \circ \varphi^{-1})(x, \xi, t) \cdot (\chi \circ P_{\mathscr{D}} \circ \varphi^{-1})(x, \xi, t)$$

appartient à $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$ (où $P_{\mathscr{D}}$ est la projection déformée définie ci-dessus et $\varphi := \tilde{\phi} \circ \psi_\phi^{-1}$ comme dans (59) du chapitre précédent).

Finalement, on désigne par $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$ l'ensemble des fonctions $g \in C^\infty(\mathscr{D}_X^M)$ à support conique compact qui sont à décroissance rapide en zéro.

Remarque 4.2.5. (1) De la définition précédente on déduit que $C_c^\infty(\mathscr{D}_X^M)$ est un sous-espace de $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$: en effet, si $f \in C_c^\infty(\mathscr{D}_X^M)$, alors $p(supp f)$ (où p est la projection en (3.2.3)) est un compact conique de $M \times [0,1]$ relatif à X et il est le support conique de f. La propriété (b) ci-dessus se satisfait immédiatement puisque f est à support compact.

(2) Comme $M \times (0,1]$ est un ouvert de $\mathscr{D}_X^M$, on peut considérer l'espace $C_c^\infty(M \times (0,1])$ comme sous-espace de $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$: en effet, si $f \in C_c^\infty(M \times (0,1])$, on peut prolonger f en $\mathscr{N}_X^M$ par zéro.

On va expliciter une possible décomposition de notre espace $\mathscr{S}_c(\mathscr{N}_X^M)$ en termes de cartes adaptées. Soit $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$ un recouvrement de X formé de cartes adaptées à X, $i.e.$, on suppose et $X \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$. Considérons le recouvrement ouvert de $M \times [0,1]$ qui consiste de $\{U_\alpha \times [0,1]\}_{\alpha \in \Delta}$ réunion avec $M \times (0,1]$. Considérons également une partition de la unité associée à ce dernier

$$\{\chi_\alpha, \lambda\}_{\alpha \in \Delta}$$

c'est à dire que l'on a les propriétés

- $\cdot$ $0 \leq \chi_\alpha, \lambda \leq 1$
- $\cdot$ $supp\, \chi_\alpha \subset U_\alpha \times [0,1]$ et $supp\, \lambda \subset M \times (0,1]$.
- $\cdot$ $\sum_\alpha \chi_\alpha + \lambda = 1$

Soit $f \in \mathscr{S}_c(\mathscr{N}_X^M)$. Posons

$$f_\alpha := [f \cdot (\chi_\alpha \circ P_{\mathscr{D}})]|_{\mathscr{D}_{V_\alpha}^{U_\alpha}} \in C^\infty(\mathscr{D}_{V_\alpha}^{U_\alpha})$$

et

$$f_1 := [f \cdot (\lambda \circ P_{\mathscr{D}})]|_{M \times (0,1]} \in C^\infty(M \times (0,1]),$$

où $P_{\mathscr{D}}$ est la projection rapelée ci dessus (voir 3.2.3), alors on a la décomposition

$$f = \sum_\alpha f_\alpha + f_1$$

Or, comme f est à support conique compact K on a que

- $\cdot$ $f_1 \in C_c^\infty(M \times (0,1])$ et
- $\cdot$ on peut supposer sans perdre généralité que χ_α est à support compact en $U_\alpha \times [0,1]$.

Ce que l'on conclut ce que l'on a une décomposition du style

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{V_\alpha}^{U_\alpha}) + C_c^\infty(M \times (0,1]) \tag{72}$$

D'autre part on a aussi des évaluations, c'est à dire, on a des applications linéaires

$$e_0 : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{N}_X^M) \text{ et}$$

$$e_t : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M) \to C_c^\infty(M) \text{ pour } t \neq 0.$$

Pour l'évaluation en zéro on a la proposition suivant :

Proposition 4.2.6. *L'évaluation en zéro $e_0 : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{N}_X^M)$ est surjective.*

Avant de montrer la proposition, on verra le problème localement. Soit $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un sous-ensemble ouvert et Ω_V^U comme en (58). Soit $g \in \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$, on définit $e_0(g)$ en $V \times \mathbb{R}^p$ par $e_0(g) = g(x,\xi,0)$. On a le résultat local analogue à 4.2.6.

Proposition 4.2.7. *e_0 définit une application linéaire surjective $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \to \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q)$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$. La première chose c'est que $e_0(g) \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^q)$ puisque $V \times \mathbb{R}^q \times \{0\}$ est fermé dans Ω_V^U. Voyons à présent que $e_0(g)$ est à support horizontal compact. Soit $K \subset U \times [0,1]$ le support conique compact de g, on pose $K_0 = K \cap U \times \{0\} \subset V$. Alors, on a par définition que $e_0(g)$ est à support horizontal compact contenu dans K_0. De plus, $e_0(g)$ satisfait la condition (s_2) puisque $\partial_x^l \partial_\xi^\alpha e_0(g)(x,\xi) = \partial_x^l \partial_\xi^\alpha g(x,\xi,0)$.

Il reste à montrer que e_0 est surjectif :

Soit $g \in \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q)$. On considère

$$h(s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{s}} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

Soit $K_0 \subset V$ le support horizontal de g. On peut supposer sans perte de généralité que $\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \in K_0 \text{ et } \|\xi\| \leq 1\} \subset U$. On pose

$$K = \{(x,\xi,t) \in U \times [0,1] : x \in K_0, \|\xi\| \leq \sqrt{t}\}$$

alors on a que $K \subset U \times [0,1]$ est un sous-ensemble compact et $K \cap U \times \{0\} = K_0$, *i.e.*, K est un compact conique de $U \times [0,1]$ relatif à V.

Soit $(x,\xi,t) \in \Omega_V^U$ on pose

$$\tilde{g}(x,\xi,t) = \begin{cases} g(x,\xi) \cdot h(1 - t\|\xi\|^2) & \text{si } x \in K_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors on a que

- $\tilde{g}$ est à support conique compact K
- $\tilde{g} \in C^\infty(\Omega_V^U)$ parce que g et h sont C^∞ et g est à support horizontal compact contenu dans K_0.

· $\tilde{g} \in \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$: Posons $\tilde{h}(\xi,t) = h(1-t\|\xi\|^2)$. Par récurrence, un calcul élémentaire montre que, pour $\alpha \in \mathbb{N}^q$, $l \in \mathbb{N}$, on a

$$\partial_\xi^\alpha \partial_t^l \tilde{h}(\xi,t) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|+l} a_\beta P_\beta(\xi,t) h^{|\beta|}(1-t\|\xi\|^2),$$

où $\beta \in \mathbb{N}^{q+1}$, a_β est une constante (qui dépende de α et l) et $P_\beta(\xi,t)$ est une somme finie de produits de la forme

$$t^{\gamma_0} \cdot \xi_1^{\gamma_1} \cdots \xi_q^{\gamma_q},\ \gamma_i \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, du fait que h et toutes ces dérivées sont bornées et en utilisant la propriété (s_2) pour g, on conclut que $\tilde{g} \in \mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$.

On conclut que $e_0 : \mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \to \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q)$ est une application linéaire surjective (La linéarité est triviale). □

On peut passer maintenant à la preuve du cas général.

Démonstration de la proposition 4.2.6. Soit $(\mathcal{V},\tau)$ une trivialisation, *i.e.* on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N}|_{\mathcal{V}} \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{V} \times \mathbb{R}^q \arrow[l, "\approx"', "\tau"] \arrow[dl, "p_1"] \\ \mathcal{V}, & \end{tikzcd}$$

où $\pi : \mathscr{N} \to X$ est la projection dans les fibres. On peut choisir $\mathcal{V}$ assez petit de façon que l'on puisse trouver un système coordonné $(\mathcal{U},\phi)$ de M adaptée à X (comme dans la section précédente) tel que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap X$. Considérons l'application $\varphi := \psi^{-1} \circ \tilde{\phi} : \mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \to \Omega_V^U$ (définie en (59) à partir d'une carte adaptée), alors on a par définition qu'elle induit un isomorphisme linéaire

$$\varphi^* : \mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \xrightarrow{\cong} \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}).$$

Or, on peut prendre la restriction en zéro de φ, c'est à dire, l'isomorphisme de fibrés vectoriels $d_N\phi : \mathscr{N}|_{\mathcal{V}} \to V \times \mathbb{R}^q$; et considérer aussi l'isomorphisme induit

$$d_N\phi^* : \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q) \xrightarrow{\cong} \mathscr{S}_c(\mathscr{N}|_{\mathcal{V}}).$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}) \arrow[r, "e_0"] & \mathscr{S}_c(\mathscr{N}|_{\mathcal{V}}) \\ \mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \arrow[r, "e_0"] \arrow[u, "\varphi^*", "\approx"'] & \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q). \arrow[u, "\approx", "d_N\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

On en déduit facilement la surjectivité de

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}) \xrightarrow{e_0} \mathscr{S}_c(\mathscr{N}|_{\mathcal{V}})$$

à partir de celle de $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \xrightarrow{e_0} \mathscr{S}_c(V \times \mathbb{R}^q)$. Pour passer au résultat global on choisit un recouvrement de X par des cartes trivialisantes, disons

$\{(\mathcal{V}_\alpha, \tau_\alpha)\}$. On peut les choisir de forme que l'on ait un recouvrement X en M par de cartes adaptés $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$. Soit $g \in \mathscr{S}_c(\mathscr{N})$, on utilise la décomposition (70) pour écrire

$$g = g_{\alpha_1} + ... + g_{\alpha_q}$$

avec $g_{\alpha_i} \in \mathscr{S}_c(\mathscr{N}|_{\mathcal{V}_{\alpha_i}})$. Prenons $\tilde{g}_{\alpha_i} \in \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^{\mathcal{U}_{\alpha_i}}_{\mathcal{V}_{\alpha_i}})$ tel que $e_0(\tilde{g}_{\alpha_i}) = g_{\alpha_i}$ (la surjectivité montrée ci-dessus), alors

$$\tilde{g} = \tilde{g}_{\alpha_1} + ... + \tilde{g}_{\alpha_q} \in \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_X)$$

est tel que $e_0(\tilde{(g)}) = g$ (voir aussi la décomposition (72)). On a ainsi montré la surjectivité cherchée. $\square$

On fini cette section en donnant quelques exemples de $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_X)$. En fait, on va voir une description de ces espaces dans le cas des exemples 3.1.6 du chapitre précédent.

Exemple 4.2.8. *1. Considérons l'exemple* 1. *de 3.1.6. Dans ce cas on a vu que $\mathscr{D}^M_\emptyset = M \times (0,1]$. Or, on voit facilement que $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_\emptyset) = C^\infty_c(M \times (0,1])$ par définition.*

2. Soit $X \subset M$ un sous-ensemble ouvert, on a vu que $\mathscr{D}^M_X = W$ où W est le sous-ensemble ouvert de $M \times [0,1]$ qui est la réunion des deux ouverts $X \times [0,1]$ et $M \times [0,1]$. Alors on a que $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_X) = C^\infty_c(W)$.

3. Soit $x_0 \in M$. On veut décrire $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_{x_0})$: Soit $(\mathcal{U}, \phi)$ une carte coordonnée en M au tour de x_0. D'après la décomposition vue en (72) on a que

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^M_{x_0}) = \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^{\mathcal{U}}_{x_0}) + C^\infty_c(M \times (0,1]).$$

On peut choisir $\mathcal{U} \approx \mathbb{R}^n$ et $\phi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. On doit donc décrire $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^n_0)$. Or, par définition on voit que par définition, $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^n_0)$ s'identifie aux fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,1])$ qui satisfont les deux propriétés suivantes

(a) Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$ avec $K \cap \mathbb{R}^n \times \{0\} = (0,0)$ et tel que si $t \neq 0$ et $t \cdot \xi \notin K$ alors $f(\xi,t) = 0$.

(b) $\forall\ k, m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^q$ il existe $C_{(k,m,\alpha)} > 0$ tel que

$$(1 + \|\xi\|^2)^k \|\partial^\alpha_\xi \partial^m_t f(\xi,t)\| \leq C_{(k,m,\alpha)}.$$

Autrement dit $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}^n_0)$ consiste de fonctions $f \in C^\infty(\mathscr{D}^n_0)$ telles que $f \circ \psi$ satisfait la condition (3) *de la définition 4.2.1.*

4.3. Une algèbre de Schwartz pour le groupoïde tangent

Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie, on rappelle que le groupoïde tangent associé à ce groupoïde est par définition la DCN $\mathscr{D}^{\mathscr{G}}_{\mathscr{G}^{(0)}} := \mathscr{G}^T$. Dans cette sous-section on va munir à $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ d'une structure d'algèbre associative, pour cela on va s'en servir du produit du groupoïde et des propriétés fonctorialles de la construction DCN vues dans le chapitre précédent.

On note comme ci-dessus par $m : \mathscr{G}^{(2)} \to \mathscr{G}$ le produit du groupoïde, alors on a déjà vu que $\mathscr{D}(m) = m^T : (\mathscr{G}^T)^{(2)} \to \mathscr{G}^T$ si on identifie $\mathscr{D}^{\mathscr{G}^{(2)}}_{\mathscr{G}^{(0)}}$ à $(\mathscr{G}^T)^{(2)}$ avec les identifications de la section précédente.

On veut définir un morphisme $m_{r,c} : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^{\mathscr{G}^{(2)}}_{\mathscr{G}^{(0)}}) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^{\mathscr{G}}_{\mathscr{G}^{(0)}})$ par les formules suivantes :

Pour $F \in \mathscr{S}_c(\mathscr{D}^{\mathscr{G}^{(2)}}_{\mathscr{G}^{(0)}})$

$$m_{r,c}(F)(x,\xi,0) = \int_{T_x\mathscr{G}_x} F(x,\xi-\eta,\eta,0)d\mu_x(\eta)$$

et

$$m_{r,c}(F)(\gamma,t) = \int_{\mathscr{G}_{s(\gamma)}} F(\gamma\circ\delta^{-1},\delta,t)t^{-q}d\mu_{s(\gamma)}(\delta)$$

Le résultat principal de cette section est la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3.1. *L'application linéaire* $m_{r,c} : \mathscr{S}_c((\mathscr{G}^T)^{(2)}) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ *est bien définie.*

La partie plus difficile de la preuve sera bien sûr de voir que $m_{r,c}$ est bien définie puisque la linéarité est une conséquence immédiate des définitions. Avant de commencer la preuve voyons comme on peut s'en servir pour munir à $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ d'un produit d'algèbre bien défini.

DÉFINITION 4.3.2. Soient $f,g \in \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$, on définit une fonction $f * g$ en $\mathscr{G}^T$ par

$$(f*g)(x,\xi,0) = \int_{T_x\mathscr{G}_x} f(x,\xi-\eta,0)g(x,\eta,0)d\mu_x(\eta)$$

pour $t=0$, et

$$(f*g)(\gamma,t) = \int_{\mathscr{G}_{s(\gamma)}} f(\gamma\circ\delta^{-1},t)g(\delta,t)t^{-q}d\mu_{s(\gamma)}(\delta)$$

pour $t \neq 0$.

En admettant pour l'instant la proposition 4.3.1 on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.3. *Le produit $*$ de la définition précédente est bien défini et on a une algèbre associative* $(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T), *)$.

DÉMONSTRATION. Soient $f,g \in \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$. Notons par $F := (f,g)$ la fonction en $(\mathscr{G}^T)^{(2)}$ définie par

$$(f,g)(\gamma,\eta) = f(\gamma)\cdot g(\eta)$$

pour tout $(\gamma, \eta) \in (\mathscr{G}^T)^{(2)}$.

De la formule de Leibnitz pour les dérivées d'un produit on déduit que $(f, g) \in \mathscr{S}_c((\mathscr{G}^T)^{(2)})$. Maintenant par définition

$$m_{r,c}((f, g)) = f * g$$

d'où on conclut que le produit est bien défini. □

Passons donc à la démonstration de la proposition 4.3.1. On va supposer que $dim\,\mathscr{G} = p + q$ et $dim\,\mathscr{G}^{(0)} = p$; en particulier cela implique que $dim\,\mathscr{G}^{(2)} = p + q + q$.

Voyons d'abord le problème localement. Soient U un ouvert $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$, posons $V = U \cap \mathbb{R}^p$. Soit $P : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ la projection $(x, \eta, \xi) \mapsto (x, \eta)$. Posons $U' = P(U) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on a donc que U' est ouvert, $V = U' \cap \mathbb{R}^p$ et $P|_V = Id_V$. On note aussi par P la restriction $P : U \to U'$. Comme dans le chapitre précedent on a une application $\tilde{P} : \Omega_V^U \to \Omega_V^{U'}$, laquelle s'écrit dans ce cas comme la projection

$$\tilde{P}(x, \eta, \xi, t) = (x, \eta, t)$$

On définit $\tilde{P}_{r,c} : \mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \to \mathscr{S}_c(\Omega_V^{U'})$ par

$$\tilde{P}_{r,c}(F)(x, \eta, t) = \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^q : (x,\eta,\xi,t) \in \Omega_V^U\}} F(x, \eta, \xi, t) d\xi$$

On a le résultat suivant :

Lemme 4.3.4. *L'application linéaire $\tilde{P}_{r,c} : \mathscr{S}_c(\Omega_V^U) \to \mathscr{S}_c(\Omega_V^{U'})$ est bien définie.*

Démonstration. (a) La première observation est-ce que l'intégrale de la définition de $\tilde{P}_{r,c}$ est toujours bien définie. En effet, on en déduit des deux points suivantes :

· Pour $t = 0$, $\xi \mapsto F(x, \eta, \xi, 0) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^q)$.
· Pour $t \neq 0$, $\xi \mapsto F(x, \eta, \xi, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q)$.

(b) Une fois que l'on peut dériver sous le signe d'intégration, on voit que $\tilde{P}_{r,c}(F) \in C^\infty(\Omega_V^{U'})$.

Alors, il nous reste à montrer que $\tilde{P}_{r,c}(F)$ est à support conique compact et la condition (r_1) de la définition 4.2.1. Pour le premier, si $K \subset U \times [0, 1]$ est le support conique compact de F, il suffit de poser

$$K' = (P \times id_{[0,1]})(K)$$

Vérifions maintenant la condition (r_1). Soient $k, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^p$ et $\beta \in \mathbb{N}^q$. On veut voir qu'il existe $C_{(k,m,l,\beta)} > 0$ tel que

$$(1 + \|\eta\|^2)^k \|\partial_x^l \partial_\eta^\beta \partial_t^m \tilde{P}_{r,c}(F)(x, \eta, t)\| \leq C_{(k,m,l,\alpha)}$$

Pour $k' \geq k + \frac{q}{2}$ et $\alpha = (0, \beta) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ on a par hypothèse qu'il existe $C'_{(k',m,l,\alpha)} > 0$ tel que

$$\|\partial_x^l \partial_\eta^\beta \partial_t^m F(x, \eta, \xi, t)\| \leq C' \frac{1}{(1 + \|(\eta, \xi)\|^2)^{k'}}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^l \partial_\eta^\beta \partial_t^m \tilde{P}_{r,c}(F)(x, \eta, t)\| &\leq C' \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^q : (x,\eta,\xi,t) \in \Omega_{\mathcal{V}}^U\}} \frac{1}{(1 + \|(\eta, \xi)\|^2)^{k'}} d\xi \\
&\leq C' \frac{1}{(1 + \|\eta\|^2)^{\frac{q}{2} - k'}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^q\}} \frac{1}{(1 + \|\xi\|^2)^{k'}} d\xi \\
&\leq C \frac{1}{(1 + \|\eta\|^2)^k}
\end{aligned}$$

avec

$$C = C' \cdot \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^q\}} \frac{1}{(1 + \|\xi\|^2)^{k'}} d\xi$$

□

On peut donner la preuve finale de cette section.

Démonstration de la proposition 4.3.1. Considérons $(\mathcal{U}, \phi)$ et $(\mathcal{U}', \phi')$ des cartes adaptées à $\mathscr{G}^{(0)}$ en $\mathscr{G}^{(2)}$ et en $\mathscr{G}$ respectivement telles que on ait un diagramme commutatif

(73)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{U}' \arrow[d, "\phi'"] \\
U \arrow[r, "P"'] & U'
\end{tikzcd}$$

où $P : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est la projection $(x, \eta, \xi) \mapsto (x, \eta)$ et $P(U) = U'$ utilisée au lemme précédent. Cela est possible parce que m est une submersion surjective.

Maintenant, si on applique au diagramme précédent la construction DCN, on obtient, grâce à la fonctorialité de cette construction, le diagramme commutatif suivant :

$$\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathscr{D}(m)} \mathscr{D}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'}$$

Or, grâce à la proposition 3.2.5, on sait que $\mathscr{D}(m)$ est une submersion. Maintenant, du lemme précédent on obtient immédiatement que l'intégration le long des fibres de $\mathscr{D}(m)$ est une application linéaire bien définie que l'on dénote par $m_{r,c} : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{U}'})$.

Finalement, soient $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ et $\{(\mathcal{U}'_\alpha, \phi'_\alpha)\}$ des recouvrements de $\mathscr{G}^{(0)}$ en $\mathscr{G}^{(2)}$ et en $\mathscr{G}$ respectivement, consistant de cartes adaptées qui satisfont la condition en (73) ci-dessus. Alors, on a des applications

$$m_{r,c} : \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^{\mathcal{U}_\alpha}) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}'_\alpha}^{\mathcal{U}'_\alpha}) \tag{74}$$

définies comme ci-dessus. Soit $F \in \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}})$. Maintenant, on peut décomposer $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}^{(2)}})$ comme en (72) et trouver ainsi des $F_{\alpha_i} \in \mathscr{D}_{\mathcal{V}_{\alpha_i}}^{\mathcal{U}_{\alpha_i}}$ et un $F_1 \in C_c^\infty(\mathscr{G}^{(2)} \times (0,1])$ tels que $F = F_{\alpha_1} + ... + F_{\alpha_n} + F_1$. Alors

$$m_{r,c}(F_{\alpha_1}) + ... + m_{r,c}(F_{\alpha_n}) + m_{r,c}(F_1) \in \sum_\alpha \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathcal{V}'_\alpha}^{\mathcal{U}'_\alpha}) + C_c^\infty(\mathscr{G} \times (0,1])$$

est un élément bien défini de $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_{\mathscr{G}^{(0)}}^{\mathscr{G}})$ qui ne dépend pas de choix (par la proposition 4.2.3). Par linéarité $m_{r,c}(F) = m_{r,c}(F_{\alpha_1}) + ... + m_{r,c}(F_{\alpha_n}) + m_{r,c}(F_1)$, ce qui conclut la preuve de la proposition 4.3.1. $\square$

CHAPITRE 5

Indice analytique à support compact

5.1. Indices analytiques à support compact d'un groupoïde de Lie

Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Dans cette section on va construire l'indice analytique à support compact associé a ce groupoïde. Pour cela on va considérer $\mathscr{S}_c(A\mathscr{G})$ muni de la structure d'algèbre du chapitre précédent.

Maintenant, comme conséquence de la proposition 4.2.6 on a un morphisme surjectif d'algèbres

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{e_0} \mathscr{S}_c(A\mathscr{G}),$$

et donc une suite exacte de la forme suivante

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{e_0} \mathscr{S}_c(A\mathscr{G}) \longrightarrow 0 \tag{75}$$

où J est le noyau de e_0 par définition.

On veut à présent passer à la K-théorie où on va définir notre indice analytique. La motivation d'avoir introduit les algèbres de Schwartz est que celles-ci ont en général la bonne K-théorie. Par exemple, on veut considérer le groupe de K-théorie $K^0(A^*\mathscr{G})$ puisque dans ce groupe on a codifié les symboles des $\mathscr{G}$-opérateurs PDO elliptiques. On rappelle de la proposition 4.1.8 que

$$K_0(\mathscr{S}_c(A\mathscr{G})) \approx K^0(A^*\mathscr{G}).$$

La K-théorie n'est pas un foncteur exact et donc il n'y a pas à priori une raison pour laquelle on puisse conclure que la suite (75) se transforme en une suite exacte du même type en K-théorie. Cependant, on verra dans la proposition suivante que le morphisme induit par

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \xrightarrow{e_0} \mathscr{S}_c(A\mathscr{G})$$

est aussi surjectif.

Proposition 5.1.1. *Le morphisme*

$$K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{e_{0,*}} K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}))$$

est surjectif

Démonstration. Soit $\sigma \in K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}))$. On sait du calcul pseudo-différentiel associé à $\mathscr{G}$ qu'il existe un $\mathscr{G}-$PDO elliptique P avec $[\sigma_P] = \sigma$. En effet, on a vu dans le chapitre 1, que d'après Atiyah-Singer un élément de $K^0(A^*\mathscr{G})$ est représenté par un symbole d'ordre zéro (voir chapitre de rappelle ou [**AS68a**]). Or, on peut prendre le symbole sur $A^*\mathscr{G} \times [0,1]$ qui est égal à σ_P pour tout t, on le dénote par $\tilde{\sigma_P}$. Maintenant, $A\mathscr{G}^T = A^*\mathscr{G} \times [0,1]$ d'où on peut considérer $\tilde{P} = (P_t)_{t\in[0,1]}$ le $\mathscr{G}^T$-PDO elliptique associé à P, autrement dit, $\sigma_{\tilde{P}} = \tilde{\sigma_P}$. Soit $i : C_c^\infty(\mathscr{G}^T) \to \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$ l'inclusion (qui est un morphisme d'algèbres), alors on affirme que $i_*(ind\,\tilde{P}) \in K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T))$ est tel que $e_{0,*}(i_*(ind\,\tilde{P})) = \sigma$. Or, ceci est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \arrow[r, "e_0"] \arrow[dr, "i"] & \mathscr{S}(A\mathscr{G}) \arrow[r, "i"] & C_r^*(A\mathscr{G}) \\
C_c^\infty(\mathscr{G}^T) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"'] & C_r^*(\mathscr{G}^T), \arrow[ur, "e_0"'] &
\end{tikzcd}$$

où les morphismes dénotés par i sont des inclusions

$\square$

Alors, en appliquant la K-théorie à la suite exacte (75), on obtient la suite exacte

$$K_0(J) \longrightarrow K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{e_0} K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \longrightarrow 0 \tag{76}$$

Définissons le groupe de K-théorie où l'indice analytique qui nous occupe sera défini. Pour cela on rappelle une construction général de la théorie de groupes . Il s'agit du co-égalisateur de deux morphismes. On est juste intéressé au cas abélien, vu pourquoi tous les groupes que l'on considère seront commutatifs.

Définition 5.1.2. Soient G, H deux groupes abéliens et f, g deux morphismes de groupes entre G et H. Le groupe $L = H/Im(f-g)$ muni du morphisme quotient $H \xrightarrow{p} L$ est appelé le co-égalisateur de $(G \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} H)$. En particulier $p \circ f = p \circ g$ d'où le nom de co-égalisateur. On dénote ce groupe par

$$\varinjlim(G \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} H).$$

Remarque 5.1.3. Avec les mêmes notations de la définition précédente, on veut remarquer que le co-égalisateur a évidement la suivante propriété universelle :

(PU) Si $H \xrightarrow{q} L'$ est un morphisme avec $q \circ f = q \circ g$ alors il existe un unique morphisme $q' : L \to L'$ tel que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & H \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & L \arrow[dl, "q'"] \\ & L' & \end{tikzcd}.$$

Définition 5.1.4. $[K_0^{h,k}(\mathscr{G})]$ Soient $\mathscr{G}$ un groupoïde de Lie et $k \in \mathbb{N}$. On pose

$$K_0^{h,k}(\mathscr{G}) := \varinjlim \left[K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])) \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \right]$$

Autrement dit, $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ est le co-égalisateur des morphismes induits en K-théorie par les évaluations $C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1]) \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} C_c^k(\mathscr{G})$. On note par $\pi : K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ l'application quotient.

Remarque 5.1.5. Dans la définition précédente, le petit h dans la notation $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ fait référence à l' homotopie. En effet, on peut donner une autre présentation au co-égalisateur $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$: Pour $x, y \in K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$, on dit qu'ils sont homotopes, $x \sim_h y$, s'il existe $z \in K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1]))$ tel que

(0) $e_0(z) = x$ et

(1) $e_1(z) = y$.

Alors $x \sim_h y$ est une relation d'équivalence en $K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$ compatible avec la structure de groupe. Le quotient $K_0(C_c^k(\mathscr{G}))/ \sim_h$ est le co-égalisateur relative aux évaluations $K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])) \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$.

La caractérisation de $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ avec la relation d'équivalence ci-dessus sera de grande utilité dans le chapitre suivant. En fait, l'accouplement de $K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$ avec la cohomologie cyclique périodique de $C_c^k(\mathscr{G})$ respecte cette relation d'équivalence (voir [**Con94**]).

On peut à présent énoncer le théorème principal de cette thèse.

Théorème 5.1.6. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Il y a un unique morphisme de groupes bien défini*

$$ind_a^{h,k} : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \tag{77}$$

qui satisfait $ind_a^{h,k} \circ e_0 = e_1^{h,k}$ où $e_1^{h,k} : K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ est la composition

$$K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{e_1} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{\iota_k} K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \xrightarrow{\pi} K_0^{h,k}(\mathscr{G});$$

et e_0 est le morphisme $K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \to K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \cong K^0(A^*\mathscr{G})$ induit par l'évaluation en zéro. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[dd, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d] \\
 & K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, "ind_a^{h,k}"] \arrow[r, "ind_a"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

Définition 5.1.7 (Indice analytique $ind_a^{h,k}$). On appelle le morphisme du théorème précédent l'indice analytique (d'ordre k) de $\mathscr{G}$. Il est donné explicitement par

$$ind_a^{h,k}(a) := e_1^{h,k}(w_a),$$

pour $a \in K_0(A^*\mathscr{G})$ et $w_a \in K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T))$ avec $e_0(w_a) = a$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "i"] & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "e_1^{h,k}"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r] \arrow[dl, "ind_a^{h,k}"] & 0 \\
 & K_0^{h,k}(\mathscr{G}) & &
\end{tikzcd},$$

où e_0 est surjectif par la proposition 5.1.1. Pour montrer le théorème il suffit de montrer que $Im\, i = Ker\, e_0 \subset Ker\, e_1^{h,k}$, autrement dit, montrer que $e_1^{h,k} \circ i = 0$. Pour cela on aura besoin de plusieurs lemmes que l'on donne ci-dessous.

Lemme 5.1.8. *Soit $\lambda : \mathscr{G}^T \to [0,1]$ la projection, alors $J = \lambda \cdot \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$.*

Démonstration. Il est clair que $\lambda \cdot \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \subset J$.
Pour montrer l'autre inclusion, rappelons d'abord que dans la définition de $\mathscr{S}_c(\Omega)$ et par la suite dans celle de $\mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$ on a imposé une condition de décroissance rapide en zéro du style (voir condition (s_2) de la définition 4.2.1)

$$(1 + \|\xi\|^2)^k \|\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \partial_t^m g(x,\xi,t)\| \leq C_{(k,m,l,\alpha)}$$

Jusqu'au maintenant on ne s'est occupé de la condition sur $\partial_t^m g(x,\xi,t)$. On va s'en servir pour conclure la preuve parce que si $f \in J$ alors un simple argument de développement en série de Taylor autour de $t = 0$ permet de voir que effectivement $f \in \lambda \cdot \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$, en effet, lorsque on factorise le t de la série, la condition sur ∂_t^m dit que le membre restant appartient à $\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$.

□

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la proposition 1.1.4, selon laquelle le groupe K_0 d'une algèbre N-nilpotente est nul.

LEMME 5.1.9. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Considerons l'idéal J^N, alors le morphisme $K_0(J^N) \xrightarrow{j} K_0(J)$ induit en K-théorie par l'inclusion $J^N \hookrightarrow J$ est surjectif.*

DÉMONSTRATION. Considérons la suite exacte d'algèbres (non unifères)

$$0 \to J^N \to J \to J/J^N \to 0$$

alors on a une suite exacte en K-théorie

$$K_0(J^N) \to K_0(J) \to K_0(J/J^N)$$

Il suffit donc de montrer que $K_0(J/J^N) = 0$. Mais ceci est une conséquence immédiate de la proposition 1.1.4 parce que $A = J/J^N$ est une algèbre N-nilpotente ($i.e.$, $a_1 \cdots a_N = 0$, $a_i \in A$). □

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $q := dim\, \mathscr{G}_x$, on va définir un morphisme d'algèbre

$$\varphi_k : J^{k+q} \to C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])$$

de la façon suivante :

$$\varphi_k(\lambda^{k+q} \cdot f)(\gamma, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^k f(\gamma, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Où on a utilisé le lemme 5.1.8 pour exprimer $J^{k+q} \subset \lambda^{k+q} \cdot \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$. On montre dans les deux lemmes suivants que φ_k est bien défini et qu'il s'agit bien d'un morphisme d'algèbres. Pour le premier, on le fait en général pour une déformation au cône normal quelconque, il est évident que φ_k en est un cas particulier.

LEMME 5.1.10. *Soit (M, X) un couple C^∞. Soit $f \in \mathscr{S}_c(\mathscr{D}_X^M)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour $(m, t) \in M \times [0,1]$,*

$$f_k(m,t) = \begin{cases} 0 & si\ t = 0 \\ t^k f(m,t) & si\ t \neq 0 \end{cases}$$

Alors $f_k \in C_c^k(M \times [0,1])$.

DÉMONSTRATION. être de classe C^k est une propriété locale et donc on peut supposer $M = U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ouvert et $X = V = U \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. On doit montrer que si $f \in \mathscr{S}_c(\Omega)$ (on rappelle que $\Omega = \{(x, \xi, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times [0,1] : (x, t\xi) \in U\}$) alors

$$f_k(x, \xi, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^k f(x, \frac{\xi}{t}, t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

appartient à $C_c^k(\mathcal{U} \times [0,1])$. Montrons donc ce dernier point.

D'abord, on remarque que le seul problème se pose en $t = 0$, en effet, en dehors de zéro la fonction f_k est de classe C^∞. Soit $(x, \xi, 0) \in \Omega$, on va voir que f_k est C^k en ce point. Or, on peut supposer de plus que $\xi \neq 0$ puisque autrement le résultat est trivial.

Posons $u_\xi(t) = \frac{\xi}{t}$, on a $u_\xi \in C^\infty((0,1], \mathbb{R}^q)$ et u_ξ satisfait

$\cdot$ $lim_{t\to 0}\|u_\xi(t)\| = +\infty$.

On rappelle que $\mathscr{S}_c(\Omega_V^U)$ consiste des applications $g \in C^\infty(\Omega_V^U)$ qui sont à support conique compact et qui satisfont la condition suivante :

(r_1) $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^p$ et $\alpha \in \mathbb{N}^q$ il existe $C_{(n,m,l,\alpha)} > 0$ tel que

$$(1 + \|\xi\|^2)^n \|\partial_x^l \partial_\xi^\alpha \partial_t^m g(x, \xi, t)\| \leq C_{(n,m,l,\alpha)}$$

On en déduit que

$$lim_{t\to 0}\|u_\xi(t)\|^k \|\partial_z^\alpha f(x, u_\xi(t), t)\| = 0$$

Ici $z = (x, \xi, t)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q \times \mathbb{N}$.

Par définition $f_k(x, \xi, t) = t^k \cdot f(x, u_\xi(t), t)$ pour $t \neq 0$ et zéro sinon. Maintenant, il suffit de remarquer que

$\cdot$ $\forall j \in \mathbb{N}$, la $j-$ème dérivée peut se calculer par

$$u_\xi^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j j!}{t^j} u_\xi(t)$$

pour conclure que f_k est au moins de classe C^k en zéro. Pour finir il reste à voir que f_k est à support compact, mais ceci est trivial puisque f est à support conique compact. En effet, le support de f_k est précisément le compact conique qui est le support conique compact de f. $\square$

Lemme 5.1.11. *Avec les définitions ci-dessus on a bien un morphisme d'algèbres*

$$\varphi_k : J^{k+q} \to C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])$$

Démonstration. Soient $f, g \in \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$. On utilise le fait que $J^{k+q} \subset \lambda^{k+q} \cdot \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$. Alors, on a

$$\varphi_k(\lambda^{k+q} \cdot f * \lambda^{k+q} \cdot g)(\gamma, t) =$$

$$\varphi_k(\lambda^{k+q} \cdot (f * \lambda^{k+q} \cdot g))(\gamma, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^k \displaystyle\int_{\mathscr{G}_{s(\gamma)}} f(\gamma \circ \eta^{-1}) g(\eta, t) t^{k+q-q} d\mu_{s(\gamma)}(\eta) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui est exactement $(\varphi_k(\lambda^{k+q} \cdot f) * \varphi_k(\lambda^{k+q} \cdot g))(\gamma, t)$ par définition.

$\square$

On note aussi par $\varphi_k : K_0(J^{k+q}) \to K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1]))$ le morphisme induit en K-théorie par φ_k. Par construction, on a les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $e_0 \circ \varphi_k = 0$ où ici e_0 dénote le morphisme d'évaluation en zéro $e_0 : C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1]) \to C_c^k(\mathscr{G})$ et

(b) le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
K_0(J) \arrow[u] \arrow[r] & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_0"] \arrow[dr, "e_1^k"] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r] & 0 \\
K_0(J^{k+q}) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi_k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])) \arrow[r, "e_1"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G})) &
\end{tikzcd}$$

Lemme 5.1.12. *Soit* $w \in K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T))$ *avec* $w \in Ker(e_0)$, *alors* $e_1^{h,k}(w) = 0$, *où de nouveau* $e_1^{h,k}$ *est la composition*

$$K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{e_1} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{\iota_k} K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \xrightarrow{\pi} K_0^{h,k}(\mathscr{G}).$$

Démonstration. Soit $x \in K_0(J)$ avec $i_*(x) = w$. Grâce au lemme 5.1.9 on peut choisir $y \in K_0(J^{k+q})$ avec $j(y) = x$. Maintenant, de la condition (b) ci-dessus on a que $e_1(\varphi_k(y)) = e_1^k(w)$ et de la condition (a) on a que $e_0(\varphi_k(y)) = 0$, d'où $e_1^k(w) \sim_h 0$. $\square$

On est prêts pour donner la preuve du théorème 5.1.6 qui est résultat le plus important de ce travail.

Démonstration du théorème 5.1.6. Soit $\sigma \in K^0(A^*\mathscr{G})$ et $w_\sigma, w'_\sigma \in K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T))$ avec $e_0(w_\sigma) = e_0(w'_\sigma)$. Du lemme précédent on a que $e_1^{h,k}(w_\sigma) = e_1^{h,k}(w'_\sigma)$, c'est à dire, $ind_a^{h,k}(\sigma)$ est bien défini et il est évident qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Il reste de montrer la commutativité du diagramme.

Pour montrer la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d, "\pi\circ\iota"] \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a^{h,k}"'] & K_0^{h,k}(\mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

on le décompose en plusieurs diagrammes qui sont commutatifs trivialement

$$\begin{tikzcd}
Ell(\mathscr{G}) \arrow[rrr, "ind"] \arrow[dd, "symb"'] \arrow[dr, "ind"] \arrow[drr, "ind"] & & & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[dd, "\iota"] \arrow[ddr, "\pi\circ\iota"] & \\
& K_0(C_c^\infty(A\mathscr{G})) \arrow[dl] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}^T)) \arrow[l, "e_0"] \arrow[ur, "e_1"] \arrow[d] & & \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[rr, "\text{''}e_0^{-1}\text{''}"] & & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_1^k"] & K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "\pi"] & K_0^{h,k}(\mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

Maintenant pour la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
& K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, "ind_a^{h,k}"] \arrow[r, "ind_a"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

on fait pareille, on décompose en

$$\begin{tikzcd}
& K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_1^k"] \arrow[d] & K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[dd, "\iota"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& K_0(C_r^*(\mathscr{G}^T)) \arrow[dr, "e_1"] & & K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[dl, "\tilde{\iota}"] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[uur, "\text{''}e_0^{-1}\text{''}"] \arrow[ur, "e_0^{-1}"] \arrow[rr, "ind_a"'] & & K_0(C_r^*(\mathscr{G})), &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{\iota} : K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est le morphisme induit par ι grâce à la propriété universelle de $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ (voir définition 5.1.4), et donc tout commute par définition. $\square$

Considérons les inclusions canoniques

$$... \hookrightarrow C_c^k(\mathscr{G}) \hookrightarrow C_c^{k-1}(\mathscr{G}) \hookrightarrow ... \tag{78}$$

Pour chaque k on a un morphisme $K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \to K_0^{h,k-1}(\mathscr{G})$ induit par le morphisme $K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \to K_0(C_c^{k-1}(\mathscr{G}))$ à partir de la propriété universelle des co-égalisateurs. On peut donc considérer la limite projective $\varprojlim_k K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ induite par le système (78) ci-dessus. Posons

$$K_0^F(\mathscr{G}) = \varprojlim_k K_0^{h,k}(\mathscr{G}), \tag{79}$$

on appelle ce groupe la K-théorie finie de $\mathscr{G}$. Or, par construction on a que $ind_a^{h,k}$ est compatible avec les morphismes $K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \to K_0^{h,k-1}(\mathscr{G})$. On conclut qu'il existe un unique morphisme de groupes

$$ind_a^{h,F} : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G})$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{tikzcd} K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a^{h,F}"] \arrow[dr, "ind_{a,\mathscr{G}}^{h,k}"'] & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[d] \\ & K_0^{h,k}(\mathscr{G}). \end{tikzcd}$$

On appelle ce morphisme *l'indice analytique à support compact de* $\mathscr{G}$.

On a aussi un morphisme, donné par la propriété universelle de la limite projective, $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \to K_0^F(\mathscr{G})$. L'indice $ind_a^{h,F}$ peut aussi se mettre dans le suivant diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \{\mathscr{G} - PDO \text{ ell. }\} \arrow[r, "ind"] \arrow[d] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d] \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a^{h,F}"'] & K_0^F(\mathscr{G}). \end{tikzcd}$$

De plus, on a aussi un morphisme $K_0^F(\mathscr{G}) \overset{\iota_F}{\to} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_a^{h,F}"] \arrow[dr, "ind_a"'] & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[d, "\iota_F"] \\ & K_0(C_r^*(\mathscr{G})). \end{tikzcd}$$

Il suffit de passer par $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$. Plus formellement, $K_0^F(\mathscr{G})$ est aussi un co-égalisateur :

$$K_0^F(\mathscr{G}) \cong \varinjlim \left[\varprojlim_k K_0(C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])) \underset{\tilde{e_1}}{\overset{\tilde{e_0}}{\rightrightarrows}} \varprojlim_k K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \right] \tag{80}$$

Alors, ι_F est le morphisme donné par la propriété universelle de façon évidente.

Cela est important parce que l'on a un indice intermédiaire entre l'indice au niveau C_c^∞ et l'indice au niveau C^*. Autrement dit l'indice à support compact associé à un groupoïde de Lie entre dans un diagramme commutatif comme celui du théorème 5.1.6.

5.2. Propriétés de l'indice analytique à support compact

Dans cette section on va voir deux propriétés des indices analytiques support compact. La première sera la compatibilité avec le morphisme de Bott et la deuxième la compatibilité avec des sous-groupoïdes ouverts. Des maintenant on va utiliser la notation $ind_{a,\mathscr{G}}^{h,k}$ pour remarquer que l'on parle de l'indice associé au groupoïde $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$.

5.2.1. Compatibilité avec Bott. Soient $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie et $\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}$ le groupoïde $\mathscr{G} \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)} \times \mathbb{R}^2$, où la partie correspondante à $\mathbb{R}^2$ est l'identité. On doit commencer par dire ce que l'on entend par morphisme de Bott. D'abord, rappelons que l'inclusion d'algèbres

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \subset C_0(\mathbb{R}^2), \tag{81}$$

induit un isomorphisme en K-théorie. Ici, le produit sera toujours le produit ponctuel.
Typiquement on a l'élément de Bott $\beta \in K^0(\mathbb{R}^2) = K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$, mais l'affirmation précédente nous permet de voir cet élément au niveau de C_c^∞, *i.e.*,

$$\beta_c \in K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \tag{82}$$

On peut ainsi prendre le produit avec cet élément pour obtenir les morphismes

$$K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta_c} K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \tag{83}$$

$$K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta_c} K_0(C_c^k(\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \tag{84}$$

$$K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \xrightarrow{\cdot \otimes \beta_c} K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)). \tag{85}$$

Maintenant, considérons les morphismes d'algèbres données par la multiplication ponctuelle

$$M^s : \mathscr{S}(A\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{S}(A\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \tag{86}$$

$$M^k : C_c^k(\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \to C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \tag{87}$$

$$M^T : \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T). \tag{88}$$

La vérification qu'il s'agit des morphismes d'algèbres est élémentaire.

On définit des morphismes de Bott de la manière suivante :

(B_s) $Bott_s : K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \to K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$ par la composition de (83) suivi du morphisme induit en K-théorie par (86).

(B_k) $Bott_k : K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \to K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}))$ par la composition de (84) suivi du morphisme induit en K-théorie par (87).

(B_T) $Bott_T : K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \to K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T))$ par la composition de (85) suivi du morphisme induit en K-théorie par (88).

Les lemmes suivants nous permettrons d'énoncer et de montrer la compatibilité des indices analytiques à support compact avec le morphisme de Bott.

Lemme 5.2.1. *Avec les notations comme ci-dessus.*
(i) *Les morphismes* (B_s) *et* (B_T) *sont compatibles modulo l'évaluation en zéro, i.e., on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "B_T"] \arrow[d, "e_0"'] & K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T)) \arrow[d, "e_0"] \\ K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r, "B_s"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \end{tikzcd}$$

(ii) *Les morphismes* (B_k) *et* (B_T) *sont compatibles modulo l'évaluation en* 1*, i.e., on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "B_T"] \arrow[d, "e_1^k"'] & K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T)) \arrow[d, "e_1^k"] \\ K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "B_k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \end{tikzcd}$$

Démonstration. (i) : Le diagramme ci-dessus se décompose de la manière suivante suivant

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "\cdot\beta_T"] \arrow[d, "e_0"'] & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^T"] \arrow[d, "(e_0 \otimes 1)_*"] & K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T)) \arrow[d, "e_0"] \\ K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r, "\beta_s"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^s"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})). \end{tikzcd}$$

Le carré à gauche est commutatif grâce à la naturalité du produit en K-théorie et le carré à droite est commutatif parce que les morphismes d'algèbres M^T et M^s commutent modulo l'évaluation en zéro. On conclut donc le résultat.

(ii) : Le diagramme ci-dessus se décompose de la manière suivante suivant

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "\cdot\beta_T"] \arrow[d, "e_1^k"'] & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^T"] \arrow[d, "(e_1^k \otimes 1)_*"] & K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T)) \arrow[d, "e_1^k"] \\ K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "\beta_k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})). \end{tikzcd}$$

Le carré à gauche est commutatif grâce à la naturalité du produit en K-théorie et le carré à droite est commutatif parce que les morphismes d'algèbres M^T et M^k commutent modulo l'évaluation e_1^k. On conclut donc le résultat. □

Le lemme suivant justifie le nom de Bott que l'on a donné à tous ces morphismes.

LEMME 5.2.2. *Le morphisme (B_s) coïncide, modulo l'isomorphisme de Fourier du corollaire 4.1.8, avec le morphisme de Bott (topologique)*

$$Bott : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K^0(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}). \tag{89}$$

DÉMONSTRATION. La preuve suit les mêmes pas que celles des lemmes ci-dessus, à savoir, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G})) \arrow[r, "\cdot\beta_s"] \arrow[d, "\mathscr{F}"'] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}) \otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^s"] \arrow[d, "(\mathscr{F}\otimes\iota)_*"] & K_0(\mathscr{S}(A\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \arrow[d, "\mathscr{F}"] \\
K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G})) \arrow[r, "\cdot Bott"'] & K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G}) \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*"'] & K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})).
\end{tikzcd}$$

Ici, $\iota : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^2)$ désigne l'inclusion, $Bott \in K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ l'élément de Bott (comme on le considère usuellement) et

$$M : \mathscr{S}(A^*\mathscr{G}) \otimes C_0(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{S}(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$$

le morphisme induit par la multiplication ponctuelle. En particulier, le morphisme

$$K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G})) \xrightarrow{\cdot Bott} K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G}) \otimes C_0(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{M_*} K_0(\mathscr{S}(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}))$$

est précisément le morphisme de Bott topologique

$$Bott : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K^0(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}).$$

Or, le carré à gauche est commutatif grâce à la naturalité du produit en K-théorie et le carré à droite est commutatif parce que les morphismes d'algèbres M^s et M commutent modulo Fourier. On conclut donc le résultat. □

PROPOSITION 5.2.3. *Le morphisme $Bott_k$ passe au quotient en homotopie, i.e., on a un morphisme induit (que l'on note toujours pareil) $Bott_k : K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$.*

Démonstration. Dénotons $e_t : C_c^k(\mathscr{G}\times[0,1]) \to C_c^k(\mathscr{G})$ le morphisme d'évaluation en t. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
K_0(C_c^k(\mathscr{G}\times[0,1])) \arrow[r, "\cdot\beta_k"] \arrow[d, "e_t"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}\times[0,1])\otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^k"] \arrow[d, "(e_t\otimes 1)_*"] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^2\times[0,1]) \arrow[d, "e_t"] \\
K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "\beta_k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G})\otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "M_*^k"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})).
\end{tikzcd}$$

Le premier carré est commutatif grâce à la naturalité du produit en $K-$théorie, et le deuxième est commutatif parce que les morphismes M_k commutent trivialement avec les évaluations. On conclut ainsi que $Bott_k$ commute avec les évaluations, d'où on a par la propriété universelle de $K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ qu'il existe un unique morphisme $K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \overset{Bott_k}{\longrightarrow} K_0^{h,k}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "Bott_k"] \arrow[d, "\pi"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \arrow[d, "\pi"] \\
K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[r, "Bott_k"'] & K_0^{h,k}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}).
\end{tikzcd}$$

$\square$

On peut énoncer la compatibilité des indices à support compact avec Bott.

Proposition 5.2.4. *L'indice analytique à support compact $ind_{a,\mathscr{G}}^F$ associé à un groupoïde de Lie est compatible avec le morphisme de Bott (topologique), i.e., le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}}^F"] \arrow[d, "Bott"'] & K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[d, "Bott_F"] \\
K_0(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}}^F"'] & K_0^F(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}}^{h,k}"] \arrow[d, "Bott"'] & K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[d, "Bott_k"] \\
K_0(A^*\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}) \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}}^{h,k}"'] & K_0^{h,k}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme se décompose en d'autres diagrammes qui sont commutatifs grâce aux lemmes 5.2.1, 5.2.1 et 5.2.3. La décomposition est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[rrr, "ind^{h,k}_{a,\mathscr{G}}"] \arrow[ddd, "Bott"'] & & & K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \arrow[ddd, "Bott_k"] \\
& K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_1^k"] \arrow[ul, "e_0"'] \arrow[d, "Bott_T"'] & K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, "Bott_k"] & \\
& K_0(\mathscr{S}_c((\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})^T)) \arrow[r, "e_1^k"'] \arrow[dl, "e_0"] & K_0(C_c^k(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \arrow[dr, "\pi"] & \\
K^0(A^*(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \arrow[rrr, "ind^{h,k}_{a,\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}}"'] & & & K_0^{h,k}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2}).
\end{tikzcd}$$

□

5.2.2. Compatibilité avec des sous-groupoïdes ouverts. Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ et $\mathscr{H} \rightrightarrows \mathscr{H}^{(0)}$ un sous-groupoïde ouvert. On a le résultat de compatibilité suivant :

Proposition 5.2.5. *Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ et $\mathscr{H} \rightrightarrows \mathscr{H}^{(0)}$ un sous-groupoïde ouvert. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{H}) \arrow[r, "ind^F_{a,\mathscr{H}}"] \arrow[d] & K_0^F(\mathscr{H}) \arrow[d] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind^F_{a,\mathscr{G}}"'] & K_0^F(\mathscr{G}).
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont induits par les inclusions des sous-groupoïdes ouverts correspondantes.

Démonstration. De nouveau, il suffit de vérifier, que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{H}) \arrow[r, "ind^{h,k}_{a,\mathscr{H}}"] \arrow[d] & K_0^{h,k}(\mathscr{H}) \arrow[d] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[r, "ind^{h,k}_{a,\mathscr{G}}"'] & K_0^{h,k}(\mathscr{G}).
\end{tikzcd}$$

La première chose à remarquer c'est que $\mathscr{H}^T \subset \mathscr{G}^T$ comme un sous-ensemble ouvert. Encore plus, l'inclusion des algèbres

$$\mathscr{S}_c(\mathscr{H}^T) \hookrightarrow \mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)$$

qui commute évidement avec toutes les évaluations. Cela implique que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{H}) \arrow[d, "j"'] & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{H}^T)) \arrow[l, "e_0"'] \arrow[d, "j"] \\
K^0(A^*\mathscr{G}) & K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[l, "e_0"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{H}^T)) \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "j"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{H})) \arrow[d, "j"] \\
K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[r, "e_1"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})),
\end{tikzcd}$$

où les morphismes notés par j sont les induits par les prolongements des fonctions par zéro en dehors du sous-ouvert. D'un autre côté, on a que le prolongement $C_c^k(\mathscr{H} \times [0,1]) \hookrightarrow C_c^k(\mathscr{G} \times [0,1])$ commute avec toutes les évaluations aussi et alors on a un morphisme induit $K_0^{h,k}(\mathscr{H}) \to K_0^{h,k}(\mathscr{G})$ qui commute avec le morphisme induit $K_0(C_c^k(\mathscr{H})) \to K_0(C_c^k(\mathscr{G}))$. Pour montrer que le diagramme dans l'énoncé de la proposition commute il faut juste remarquer qu'il se décompose en diagrammes commutatifs de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{H}) \arrow[rrr, "ind_{a,\mathscr{H}}^{h,k}"] \arrow[ddd, "j"'] & & & K_0^{h,k}(\mathscr{H}) \arrow[ddd, "j"] \\
& K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{H}^T)) \arrow[ul, "e_0"] \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "j"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{H})) \arrow[ur, "\pi"'] \arrow[d, "j"] & \\
& K_0(\mathscr{S}_c(\mathscr{G}^T)) \arrow[dl, "e_0"] \arrow[r, "e_1"'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[dr, "\pi"'] & \\
K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[rrr, "ind_{a,\mathscr{G}}^{h,k}"'] & & & K_0^{h,k}(\mathscr{G}),
\end{tikzcd}$$

où les morphismes ι sont induits par les inclusions canoniques $C_c^\infty \subset C_c^k$. On conclut ainsi la preuve. $\square$

CHAPITRE 6

Applications

6.1. Un théorème de l'indice longitudinal

Soit (M, F) une variété feuilletée. Notons par $\mathscr{G} \rightrightarrows M$ son groupoïde d'holonomie associé. Dans ce cas on sait que l'algébroïde de Lie est donné par le sous-fibre qui intègre le feuilletage, $i.e.$, F.

Dans [**CS84**], Connes-Skandalis définissent un indice topologique ind_t : $K^0(F^*) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ et ils montrent que celui-ci coïncide avec le C^*-indice analytique associé à $\mathscr{G}$ (voir section de rappelle sur les indices analytiques).

Dans ce paragraphe on va établir un théorème de l'indice longitudinal plus primitif. On doit d'abord définir les groupes où nos indices prendront ses valeurs. Il s'agit d'une légère modification des groupes de K-théorie (finie) utilisés dans le chapitre précédent.

Définition 6.1.1 (K-théorie finie périodique). Soit $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde de Lie. Comme on a vu dans le chapitre précédent on peut considérer le morphisme de Bott, $K_0^F(\mathscr{G}) \stackrel{Bott}{\longrightarrow} K_0^F(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$. Cela nous permet de prendre la limite inductive

$$\varinjlim_m K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m})$$

induite par le système $K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}) \stackrel{Bott}{\longrightarrow} K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2(m+1)})$. On dénote ce groupe par

$$K_0^{B,F}(\mathscr{G}) = \varinjlim_m K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}), \tag{90}$$

et on l'appelle la K-théorie finie périodique de $\mathscr{G}$.

On pose

$$ind_{a,\mathscr{G}}^{B,F} : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G})$$

le morphisme donné par la composition de $ind_{a,\mathscr{G}}^F : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G})$ suivi de $K_0^F(\mathscr{G}) \stackrel{Bott}{\longrightarrow} K_0^{B,F}(\mathscr{G})$. On l'appelle l'indice analytique périodique de $\mathscr{G}$.

Remarque 6.1.2. Par définition, $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$ satisfait la Périodicité de Bott. Autrement dit, le morphisme

$$K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \stackrel{Bott}{\longrightarrow} K_0^{B,F}(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})$$

est un isomorphisme.

Remarque 6.1.3. L'indice analytique périodique satisfait aussi la propriété d'être un indice intermédiaire entre C^∞ et C_r^*. En effet, il entre dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{\mathscr{G} - pdoell.\} \arrow[r, "ind"] \arrow[dd] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[d] \\
 & K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \arrow[d] \\
K_0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, "ind_a^{B,F}"] \arrow[r, "ind_a"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G})),
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est induit par les morphismes

$$K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m})) \cong K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

en utilisant la périodicité de Bott en K-théorie des C^*-algèbres.

On définit à présent l'indice topologique périodique d'un feuilletage. La définition est l'analogue de celle de Connes-Skandalis pour le C^*-indice topologique associé au feuilletage.

Définition 6.1.4. [Indice topologique périodique] Soit $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ un plongement, on peut alors considérer le feuilletage sur $M \times \mathbb{R}^{2m}$ donné par le fibré $\tilde{F}$, où $\tilde{F}_{(x,t)} = F_x \times \{0\}$, c'est à dire que les feuilles de ce feuilletage sont de la forme $L \times \{t\}$ où L est une feuille de (M, F). Ce feuilletage a comme groupoïde d'holonomie associé $\tilde{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}$. On considère le fibré normal au feuilletage en $\mathbb{R}^{2m}$, $T_x := (g_*(F_x))^\perp$. Or, l'application $h : T \to M \times \mathbb{R}^{2m}$ donnée par $(x, \xi) \mapsto (x, g(x) + \xi)$ permet d'identifier T avec une transversale ouverte de $(M \times \mathbb{R}^{2m}, \tilde{F})$, on note cette transversale toujours par T. Soit N le fibré normal à l'inclusion $T \subset M \times \mathbb{R}^{2m}$, on peut prendre un voisinage Ω de T en $M \times \mathbb{R}^{2m}$ de telle façon que l'on ait $\tilde{\mathscr{G}}|_\Omega := \mathscr{G}_\Omega \approx N \times_T N$ où $N \times_T N \rightrightarrows N$ est le groupoïde pair sur T. Il est facile de vérifier que l'algebroïde de Lie de ce dernier groupoïde, $A\mathscr{G}_\Omega = N \oplus N$, peut s'identifier à $F \oplus \mathbb{R}^{2m}$. On peut donc considérer l'isomorphisme de Bott

$$K^0(F) \overset{Bott}{\to} K^0(A\mathscr{G}_\Omega)$$

On définit finalement notre indice topologique de la manière suivante :

On appelle indice topologique périodique le morphisme

$$ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F} : K^0(F) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G})$$

donné par la composé

$$K^0(F) \xrightarrow{Bott} K^0(A\mathscr{G}_\Omega) \xrightarrow{Thom^{-1}} K^0(T) \xrightarrow{\iota} K_0^{B,F}(\mathscr{G})$$

où ι est donnée par la composé
(91)

$$K^0(T) \xrightarrow{\mathscr{M}} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_\Omega)) \xrightarrow{i} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m})) \longrightarrow K_0^F(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}) \longrightarrow K_0^{B,F}(\mathscr{G}),$$

où $K^0(T) \xrightarrow{\mathscr{M}} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_\Omega))$ est l'isomorphisme induit de l'équivalence de Morita entre les groupoïdes $\mathscr{G}_\Omega$ et T. Le morphisme

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_\Omega)) \xrightarrow{i} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}))$$

est induit par l'inclusion comme sous-groupoïde ouvert $\mathscr{G}_\Omega \subset \tilde{\mathscr{G}} = \mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}$.

Remarque 6.1.5. Si $C_c^\infty(\mathscr{G}) \subset C_r^*(\mathscr{G})$ est une sous-algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe, alors $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{j} K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est un isomorphisme. En particulier,

$$K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \cong K_0^F(\mathscr{G}) \cong K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \cong K_0(C_r^*(\mathscr{G})),$$

et donc on a bien que dans ce cas l'indice analytique périodique et l'indice topologique périodique coïncident avec le C^*-indice analytique et avec le C^*-indice topologique respectivement.

On peut à présent énoncer le théorème de l'indice longitudinal dans le cadre qui nous occupe.

Théorème 6.1.6. *[Théorème de l'indice longitudinal renforcé] Soit (M,F) une variété feuilleté. Avec les mêmes notations que ci-dessus on a que*

$$ind_{a,\mathscr{G}}^{B,F} = ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F}.$$

En particulier l'indice $ind_{t,\mathscr{G}}^{B,F}$ ne dépend pas de choix faits pour sa définition.

Pour la preuve on aura besoin de la proposition suivante.

Proposition 6.1.7. *Soit $N \xrightarrow{p} T$ un fibré vectoriel (réel à priori) au-dessus de T. Considérons le groupoïde de Thom associé, $\mathscr{G}_{\mathscr{T}} := N\times_T N \rightrightarrows N$, lequel a comme algébroïde de Lie $N\oplus N^* \cong N\otimes\mathbb{C}$ (voir l'exemple 4. de 3.3.4). Alors, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K^0(A^*\mathscr{G}_{\mathscr{T}}) \arrow[r, "Thom^{-1}"] \arrow[d, "ind_{a,\mathscr{G}_{\mathscr{T}}}"'] & K^0(T) \arrow[d, "\mathscr{M}"] \\ K_0^F(\mathscr{G}_{\mathscr{T}}) & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_{\mathscr{T}})) \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd},$$

où $\mathscr{M}$ est le morphisme donné pour l'équivalence de Morita entre les groupoïdes $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$ et T. Autrement dit, modulo Fourier et Morita, l'indice analytique à support compact de $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$ coïncide avec l'inverse de l'isomorphisme de Thom.

Démonstration. On sait (voir exemple 3.4.1) que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^0(A\mathscr{G}_{\mathscr{T}}) \arrow[r, "Thom^{-1}"] & K^0(T) \arrow[d, "\approx"', "\mathscr{M}"] \\ K^0(A^*\mathscr{G}_{\mathscr{T}}) \arrow[u, "Fourier", "\approx"'] \arrow[r, "ind_{a,\mathscr{G}_{\mathscr{T}}}"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G}_{\mathscr{T}})), \end{tikzcd},$$

où $\mathscr{M}$ est l'isomorphisme donné pour l'équivalence de Morita entre les groupoïdes $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$ et T. Autrement dit, modulo Fourier et Morita, le C^*-indice analytique de $\mathscr{G}_{\mathscr{T}}$ coïncide avec l'inverse de l'isomorphisme de Thom.

D'après la remarque précédente, il suffit de voir que $C_c^\infty(\mathscr{G}_{\mathscr{T}}) \subset C_r^*(\mathscr{G}_{\mathscr{T}})$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe. Or, celui-ci est un problème local, c'est qui veut dire que l'on peut supposer $T \subset \mathbb{R}^p$ un sous-ensemble ouvert et $N = T \times \mathbb{R}^q$ un fibré trivial au-dessus de T. Dans ce cas on a

$$C_c^\infty(N \times_T N) = C_c^\infty(T \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q) \cong C_c^\infty(T, C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q))$$

([**Trè67**] chapitre 40). Soit $f \in C_c^\infty(T, C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q))$ et soit g une fonction holomorphe (dans un voisinage approprié de zéro) avec $g(0) = 0$. On doit vérifier que $g(f) \in C_c^\infty(T, C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q))$. C'est un résultat classique le fait que l'algèbre des opérateurs à noyau régularisants $C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q)$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans l'algèbre des opérateurs compacts $\mathscr{K}$ [**Trè80**], alors pour tout $t \in T$, $g(f(t)) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q)$. Maintenant, l'application $t \mapsto g(f(t)) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q)$ est dans $C_c^\infty(T, C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q))$ de façon évidente (voir réf.cit. pour une définition précise de $C_c^\infty(T, C_c^\infty(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q)))$. $\square$

On peut passer à la démonstration du théorème.

Démonstration du théorème 6.1.6. Pour cette preuve on va utiliser la même notation que pour la définition de l'indice topologique ci-dessus, en particulier $A\mathscr{G} = F$ et $\mathscr{G}_\Omega = N \times_T N$, d'où $A\mathscr{G}_\Omega = F \oplus \mathbb{R}^{2m} = F \oplus F \oplus T$. En fait on va montrer que l'on a l'égalité des indices avant même de passer à la limite inductive, autrement dit on va montrer que les deux morphismes suivants coïncident

$$Bott \circ ind_{a,\mathscr{G}}^F : K^0(F) \to K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}), \tag{92}$$

et

$$K^0(F) \xrightarrow{Bott} K^0(A\mathscr{G}_\Omega) \xrightarrow{Thom^{-1}} K^0(T) \xrightarrow{\iota} K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}) \tag{93}$$

où ι est donnée par la composé

$$K^0(T) \xrightarrow{\mathscr{M}} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_\Omega)) \longrightarrow K_0(C_c^\infty(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m})) \longrightarrow K_0^F(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}),$$

Maintenant, grâce à la proposition précédente on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K^0(A^*\mathscr{G}_\Omega) \arrow[r, "Thom^{-1}"] \arrow[d, "ind_{a,\mathscr{G}_\Omega}"'] & K^0(T) \arrow[d, "\mathscr{M}"] \\
K_0^F(\mathscr{G}_\Omega) & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}_\Omega)), \arrow[l, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

D'autre part, grâce à la compatibilité de l'indice analytique borné avec des sous-groupoïdes ouverts et avec le morphisme de Bott vu à la fin du chapitre précédent, on a que $ind^F_{a,\mathscr{G}_\Omega}$ et $ind^F_{a,\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}}$ coïncident modulo les morphismes induits par les inclusions des ouverts, et on a aussi que $ind^F_{a,\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}}$ et $ind^F_{a,\mathscr{G}}$ coïncident modulo Bott. Alos, tous les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
K^0(F) \arrow[rr, "Bott"] \arrow[dr, "Bott"'] \arrow[ddd, "ind^F_{a,\mathscr{G}}"'] & & K^0(A\mathscr{G}_\Omega) \arrow[r, "Thom^{-1}"] \arrow[dl, "\approx"', "i"] \arrow[dd, "ind^F_{a,\mathscr{G}_\Omega}"'] & K^0(T) \arrow[dd, "\mathscr{M}"] \\
& K^0(A\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}) \arrow[ddr, "ind^F_{a,\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}}"'] & & \\
& & K_0^F(N\times_T N) \arrow[d, "i"] & K_0(C_c^\infty(N\times_T N)) \arrow[l, "\pi"] \arrow[d, "i"] \\
K_0^F(\mathscr{G}) \arrow[rr, "Bott"'] & & K_0^F(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m}) & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}\times\mathbb{R}^{2m})). \arrow[l, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

Pour conclure il faut juste remarquer que dans le diagramme précédent on a précisément d'un coté le morphisme (92), à gauche et première en bas ; et de l'autre coté on a le morphisme (93). □

6.2. Accouplements avec de cocycles cycliques bornés

La motivation pour définir les indices analytiques à support compact, comme $ind^F_{a,\mathscr{G}}$, est de pouvoir obtenir des invariants numériques à partir des $\mathscr{G}$-opérateurs elliptiques. Le résultat principal de cette section est dans cette direction.

Avant d'énoncer le résultat, rappelons que l'on a un accouplement entre la K-théorie et la Cohomologie cyclique (périodique) d'une algèbre associative (voir 1.3.8). Or, comme on l'a discuté au premier chapitre, si on considère des algèbres munies d'une bonne topologie et sa cohomologie périodique continue, alors l'accouplement entre la K-théorie (algèbrique) et cette cohomologie continue est toujours bien défini (voir aussi [**Con85, Con94, CST04**]). Les algèbres que on va traiter dans cette section ont toutes de topologies d'algèbres classiques, à savoir : Pour $0 \leq k \leq +\infty$,

$C_c^k(\mathscr{G})$ a la topologie LF[1] induite par les espaces de Frèchet $C_c^\infty(K) = \{f \in C_c^k(\mathscr{G}) : supp\, f \subset K\}$ pour $K \subset \mathscr{G}$ des sous-ensembles compacts de $\mathscr{G}$. Pour nous, $HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$ dénotera toujours la cohomologie périodique continue.

Une des propriétés importantes de ces espaces de cohomologie est que l'accouplement avec la K-théorie respecte l'homotopie utilisée pour définir nos groupes de K-théorie finie. En effet, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 6.2.1. [**Con85, Goo85**] *Pour* $0 \leq k \leq +\infty$*, l'accouplement de Connes passe aux groupes de* K*-théorie définis dans le chapitre précédent :*

$$HP^0(C_c^k(\mathscr{G})) \times K_0^{h,k}(\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{94}$$

DÉMONSTRATION. Soit $e \in C^\infty([0,1], C_c^\infty(\mathscr{G})) \oplus \mathbb{C}$ un idempotent. Celui-ci définit une famille (C^∞) d'idempotents e_t dans $\widetilde{C_c^\infty(\mathscr{G})}$. Posons $a_t := \frac{de_t}{dt}(2e_t - 1)$. Alors, si

$$\tau : \underbrace{C_c^\infty(\mathscr{G}) \times \cdots \times C_c^\infty(\mathscr{G})}_{2n+1-fois} \to \mathbb{C}$$

un calcul élémentaire[2] montre que

$$\frac{d}{dt}\langle \tau, e_t \rangle = \sum_{i=0}^{2n} \tau(e_t, ..., [a_t, e_t], ..., e_t) =: L_{x_t}\tau(e_t, ..., e_t).$$

Finalement, *les dérivées de Lie* L_{x_t} agissent trivialement sur $HP^0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ (voir [**Con85, Goo85**]), d'où $\langle \tau, e_t \rangle$ est constant en t. En particulier, $\langle \tau, e_0 \rangle = \langle \tau, e_1 \rangle$. □

On peut énoncer le résultat principal de cette section, il est un corollaire immédiat du théorème 5.1.6.

COROLLAIRE 6.2.2. *Soit* D *un* $\mathscr{G}$*-opérateur pseudodifférentiel elliptique. Soit* $k \in \mathbf{N}$ *et* $\tau_k \in HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$*. Notons par* $\iota_k : C_c^\infty(\mathscr{G}) \hookrightarrow C_c^k(\mathscr{G})$ *l'inclusion canonique et* $\tau = \iota_k^*(\tau_k) \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$*. Alors on a la formule suivante*

$$< ind\, D, \tau >=< ind_a^{h,k}([\sigma(D)]), \tau_k >, \tag{95}$$

où $[\sigma(D)] \in K^0(A^*\mathscr{G})$ *est la classe du symbole principal de* D*.*

[1]Topologie limite inductive d'espaces de Frèchet

[2]en utilisant que e_t est un idempotent

Démonstration. En général (voir la section de rappel sur les accouplements) on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "<,\tau>"] \arrow[d, "(\iota_k)_*"'] & \mathbf{C} \\ K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[ur, "<,\tau_k>"'] & \end{tikzcd}$$

Maintenant, l'égalité (95) est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme dans le théorème 5.1.6 et l'invariance par homotopie de la proposition précédente. □

Une autre façon d'énoncer le corollaire est la suivante : Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique. Soit $\tau \in HP(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ tel qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\tau_k \in HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$ avec $\tau = \iota_k^*(\tau_k)$, alors on a la formule (95). Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 6.2.3. Soit $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. On dit que τ est borné s'il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\tau_k \in HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$ avec $\tau = \iota_k^*(\tau_k)$.

On peut aussi énoncer la formule (95) en termes de l'indice analytique à support compact $ind_{a,\mathscr{G}}^F : K^0(A^*\mathscr{G}) \to K_0^F(\mathscr{G})$ et raffiner en même temps la définition précédente. Les inclusions (78) induisent un morphisme universel

(96) $$\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \stackrel{\iota}{\longrightarrow} HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})).$$

Or, l'accouplement (94) ci-dessus induit un accouplement

(97) $$\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \times K_0^F(\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Les cocycles cycliques bornés sont précisément les éléments de $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ qui sont dans l'image de ι. On va énoncer donc le corollaire de la façon suivante : Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique. Soit $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ borné. Soit $\bar{\tau} \in \varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$ tel que $\iota(\bar{\tau}) = \tau$, alors on a la formule suivante

(98) $$< ind\, D, \tau >=< ind_a^F([\sigma(D)]), \bar{\tau} > .$$

Remarque 6.2.4. En particulier on vient de montrer que pour τ un cocycle cyclique borné, l'accouplement $< ind\, D, \tau >$ ne dépend que de la classe du symbole $[\sigma_D] \in K^0(A^*\mathscr{G})$. Pour être plus clair, rappelons que l'application $D \mapsto ind\, D \in K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ ne se factorise pas en général sur

$K^0(A^*\mathscr{G})$:

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[ur, dotted, "\nexists"] & \end{tikzcd}.$$

Pourtant, l'application $D \mapsto < ind\, D, \tau >$ induit un morphisme

$$K^0(A^*\mathscr{G}) \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$$

donné par $[\sigma_D] \mapsto < ind\, D, \tau >$. Dans un diagramme, on a

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "\langle , \tau \rangle"] & \mathbb{C} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[urr, "\tau"'] & & \end{tikzcd}.$$

Il est donc intéressant de voir quels sont les cocycles en $C_c^\infty(\mathscr{G})$ qui sont bornés. Il est clair à priori que tout cocyle cyclique naturel va satisfaire automatiquement cette propriété.

On finit cette section avec quelques exemples de cocycles cycliques bornés construits par Connes dans [**Con86**], qui sont de grande importance en géométrie non commutative. Ils sont en effet des cas particuliers de cocycles cycliques provenant de l'application (105) et donc bornés comme on verra dans la section prochaine.

Exemple 6.2.5. *[Actions de groupes] Soient M une variété orientée compacte de dimension n et G un groupe de Lie agissant sur M par difféomorphismes qui préservent l'orientation. Soit ω un k-cocycle (normalisé) sur G à coefficients dans le G-module de n-formes sur M : $\omega \in Z^k(G, \Omega_M^n)$ tel que $\omega(g_1, ..., g_k) = 0$ si un des $g_i = 1$ ou si $g_1 \cdots g_k = 1$. Dans* [**Con86**] *(lemme 7.1), Connes montre que l'égalité suivante définit un k-cocycle cyclique sur l'algèbre de convolution du groupoïde $M \rtimes G$, $C_c^\infty(M \rtimes G)$:*

$$\tau(f^0, ..., f^k) = \int f^0(\gamma_0) \cdots f^k(\gamma_k) \omega(g_1, ..., g_k)(x) dg_1 \cdots dg_k, \tag{99}$$

où l'intégrale est sur $\{(\gamma_0, ..., \gamma_k) \in \mathscr{G}^{(k+1)} : \gamma_0 \cdots \gamma_k \in \mathscr{G}^{(0)}\}$; et où on a dénoté $\gamma_0 \cdots \gamma_k = x$ et $p_2(\gamma_i) = g_i$ (projection en la deuxième coordonnée). Il est clair que dans l'intégrale ci-dessus on peut considérer les applications f^i étant dans $C_c^0(M \rtimes G)$ et elle est toujours bien définie. Autrement dit, τ est un cocycle cyclique borné.

Exemple 6.2.6 (Godbillon-Vey). *Considérons une variété compacte M munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ avec groupoïde d'holonomie $\mathscr{G}$. Supposons que le feuilletage $\mathscr{F}$ est transversalement orienté de codimension 1. Soit T une transversale complète, alors T est une variété orientée de dimension 1. Soit*

$\mathscr{G}_T^T$ le groupoïde restreint à la transversale. On va proposer un 2-cocycle cyclique borné sur l'algèbre $C_c^\infty(\mathscr{G}_T^T)$. Or, comme $\mathscr{G}_T^T$ et $\mathscr{G}$ sont Morita équivalents, on aura donné à la fin un cocyle cyclique sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$.

Soit ρ une densité positive sur T. On définit un homomorphisme $\delta : \mathscr{G}_T^T \to \mathbb{R}_+^*$ appelé l'homomorphisme modulaire et donné par

$$\delta(\gamma) = \tfrac{\rho_y}{dh_\gamma(\rho_x)} \text{ pour } \gamma \in \mathscr{G}_T^T,\ \gamma : x \mapsto y,$$

où $dh_\gamma : |\tau_x| \to |\tau_y|$ est l'induit par l'application d'holonomie linéaire. On considère $log\,\delta : \mathscr{G}_T^T \to \mathbb{R}$. Alors, la formule

$$c(\gamma_1, \gamma_2) = l(\gamma_2)dl(\gamma_1) - l(\gamma_1)dl(\gamma_2)$$

*définit un 2-cocycle sur $\mathscr{G}_T^T$ à valeurs dans l'espace des 1-formes sur $\mathscr{G}_T^T$. Ce cocycle est connu sous le nom du cocycle de Bott-Thurston (voir [**Thu72**]). On définit un 2-cocycle cyclique en $C_c^\infty(\mathscr{G}_T^T)$ de la forme suivante*

$$\psi_c(f^0, f^1, f^2) = \int_{\mathscr{G}_T^T} f^0(\gamma_0)f^1(\gamma_1)f^2(\gamma_2)c(\gamma_1, \gamma_2). \tag{100}$$

*Pour voir qu'il s'agit vraiment d'un cocycle cyclique voir [**Con86**] ou [**Con94**]. En fait, la preuve est une adaptation de celle associée aux cocycles de groupes comme dans l'exemple précédent. Or, il est clair que l'intégration dans l'équation (100) ci-dessus peut se faire si on remplace les f^i par des fonctions dans $C_c^k(\mathscr{G}_T^T)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, autrement dit, le cocycle cyclique ψ_c est borné.*

Maintenant, rappelons comme ce cocycle cyclique est lié à la classe de Godbillon-Vey classique : D'abord rappelons la construction de cette classe. Comme F est transversalement orienté de codimension 1, il est défini globalement par une 1-forme non nulle ω : Pour tout $x \in M$, $ker\,\omega_x = \mathscr{F}_x$. Il est bien connu (Théorème de Frobenius) que dans ce cas il existe une 1-forme α en M telle que $d\omega = \alpha \wedge \omega$. La $3-$forme $\alpha \wedge d\alpha$ est fermée et sa classe de cohomologie ne dépend pas de choix, uniquement du feuilletage. Cette classe est appelée la classe de Godbillon-Vey de $(M, \mathscr{F})$. Elle est souvent dénotée par $GV \in H^3(M;\mathbb{R})$. Avec un peu plus du travail on peut définir GV comme une classe en $H^3(B\mathscr{G}_T^T) \cong H^3(B\mathscr{G})$. Comme on verra plus bas $H^*(B\mathscr{G})$ peut être vue comme facteur directe de $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Sous cette identification, GV correspond au cocycle cyclique borné vu ci-dessus, ψ_c.

Exemple 6.2.7 (La classe fondamentale transverse). *Soit (M, F) une variété feuilletée de codimension q avec groupoïde d'holonomie $\mathscr{G}$. La classe fondamentale transverse est une classe $[V/F] \in HC^q(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Dans le cas où $q = 0$ elle est donnée par la classe fondamentale de M :*

$$(f_0, ..., f_m) \mapsto \int_M f_0 df_1 \cdots df_m, \tag{101}$$

avec $m = dim\, M$[3]*.*

Pour le cas général la façon la plus simple de procéder est de se restreindre à une transversale (complète). Dans ce cas, la restriction du groupoïde d'holonomie à T*,* $\mathscr{G}_T$*, est étale et Morita équivalente à* $\mathscr{G}$*, en particulier* $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \cong HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}_T))$ *(voir par exemple* [**Cra99**]*). Or, la formule pour la classe fondamentale transverse dans* $HC^q(C_c^\infty(\mathscr{G}_T))$ *prend une forme similaire à la formule (101) :*

$$(f_0, ..., f_q) \mapsto \int_T f_0 d_H f_1 \cdots d_H f_q,$$

où d_H *est une différentiation transverse qui dépend à priori d'une distribution transverse à* F*, mais dont la classe dans* $HC^q(C_c^\infty(\mathscr{G}_T))$ *définie par la formule ci-dessus ne dépend pas de choix. Pour une exposition détaillée le lecteur est envoyé à* [**Con94**] *section III.7 ou à* [**Gor99**] *pour une autre formule de la même classe. Dans tous les cas, il est immédiat qu'il s'agit d'un cocycle cyclique borné.*

6.3. Cohomologie cyclique bornée

Dans cette section on se propose de décrire les cocycles sur $C_c^\infty(\mathscr{G})$ qui sont bornés. On aura ainsi les cocycles auxquels nos résultats s'appliquent. En fait, pour un groupoïde étale, on verra que tous les cocycles provenant de la géométrie du groupoïde sont bornés.

On peut dire, d'après (96) ci-dessus, que la cohomologie cyclique bornée pour un groupoïde de Lie est par définition l'espace $\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G}))$. On va décrire cet espace comme la cohomologie d'un complexe de co-chaines : Posons $C_F^q(\mathscr{G})$ l'ensemble des applications multilinéaires continues

$$\tau : \underbrace{C_c^\infty(\mathscr{G}) \times \cdots \times C_c^\infty(\mathscr{G})}_{q+1-fois} \to \mathbb{C}$$

tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et un prolongement τ_k de τ à $\underbrace{C_c^k(\mathscr{G}) \times \cdots \times C_c^k(\mathscr{G})}_{q+1-fois}$, autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C_c^\infty(\mathscr{G}) \times \cdots \times C_c^\infty(\mathscr{G}) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathbb{C} \\ C_c^k(\mathscr{G}) \times \cdots \times C_c^k(\mathscr{G}) \arrow[ur, "\tau_k"'] & \end{tikzcd} \quad . \tag{102}$$

Soit $\tau \in C_F^q(\mathscr{G})$, alors $b\tau$ est évidement dans $C_F^{q+1}(\mathscr{G})$, en effet, $b\tau_k$ est un prolongement. De la même façon $B\tau \in C_F^{q-1}(\mathscr{G})$. On peut ainsi considérer le bicomplexe $(C_F^{n,m}(\mathscr{G}), b, B)$ où $C_F^{n,m}(\mathscr{G}) = C_F^{n-m}(\mathscr{G})$ pour $n - m \geq 0$ et

[3]on peut supposer M orientée ou sinon prendre des demi-densités.

zéro sinon. La preuve qu'il s'agit bien d'un bicomplexe est exactement la même que pour le bicomplexe usuel $(C^{n,m}(A), b, B)$ (voir [**Con94**]).

Définition 6.3.1. On dénote par $HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ la cohomologie du bicomplexe $(C_F^{n,m}(\mathscr{G}), b, B)$. On appelle cette cohomologie "la cohomologie cyclique bornée de $\mathscr{G}$".

La première observation est que $\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \cong HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$: Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a un morphisme

$$HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \xrightarrow{\eta_k} HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$$

induit par l'inclusion de bicomplexes $(C^{n,m}(C_c^k(\mathscr{G})), b, B) \hookrightarrow (C_F^{n,m}(\mathscr{G}), b, B)$. Ces morphismes η_k induisent un morphisme

$$\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \xrightarrow{\eta} HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})).$$

Il est presque une tautologie voir que η est en effet un isomorphisme. Par la propriété universelle de la limite inductive $\varinjlim_k$ on a de plus que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_k HP^*(C_c^k(\mathscr{G})) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\eta"'] & HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \\
HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})), \arrow[ur, "\iota'"'] &
\end{tikzcd}$$

où ι' est induit par l'inclusion $C_F^{n,m}(\mathscr{G}) \subset C^{n,m}(C_c^\infty(\mathscr{G}))$.

De nouveau par les propriétés universelles de limites inductives et la compatibilité des morphismes avec l'accouplement de Connes, on a un accouplement entre la cohomologie cyclique bornée et la K-théorie bornée de $\mathscr{G}$:

$$HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \times K_0^F(\mathscr{G}) \to \mathbb{C}. \tag{103}$$

Cet accouplement est donné explicitement de la manière suivante : Soient $\tau \in C_F^{n,m}(\mathscr{G})$ et $x = (x_1, x_2, ...) \in K_0^F(\mathscr{G}) = \varprojlim_k K_0^{h,k}(\mathscr{G})$. Soit τ_k une extension de τ comme en (102). Alors

$$\langle \tau, x \rangle = \langle \tau_k, x_k \rangle.$$

On peut dire ainsi que la cohomologie cyclique bornée satisfait exactement les propriétés dont on a besoin pour faire la théorie de l'indice.

Remarque 6.3.2. L'accouplement $HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \times K_0^F(\mathscr{G}) \to \mathbb{C}$ induit un accouplement

$$HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \times K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{104}$$

parce que la cohomologie cyclique périodique satisfait la périodicité de Bott.

Alors, les indices du théorème longitudinal prennent ses valeurs dans un groupe où l'on peut appliquer la théorie de Chern-Connes pour extraire des invariants numériques.

6.3.1. Le cas des groupoïdes étales. Le cas des groupoïdes étales est beaucoup plus simple à traiter. Connes a donné une règle pour inclure la cohomologie totale du groupoïde comme facteur direct de la cohomologie cyclique périodique [**Con87, Con94**]. On va voir, dans ce cas, que tous les cocycles provenant de la géométrie du groupoïde[4] sont bornés.

Considérons l'espace classifiant, $B\mathscr{G}$, et la cohomologie tordue de cet espace, $H^*_\tau(B\mathscr{G})$. Dans le cas du groupoïde étale associé à un feuilletage (une variété comme cas particulier) on sait que c'est dans $H^*_\tau(B\mathscr{G})$ que se trouvent les classes caractéristiques associées au feuilletage (voir [**Bot72**]), en particulier les classes provenant de la cohomologie de Gelfand-Fuchs. Dans [**Con86**], Connes a construit un morphisme de groupes (pour n'importe quel groupoïde étale)

$$\phi : H^*_\tau(B\mathscr{G}) \to HP^*(C^\infty_c(\mathscr{G})), \tag{105}$$

et il a montre qu'il s'agit d'une inclusion comme facteur direct (voir aussi [**Con94**], $III.2.\delta$). On va définir un morphisme de groupes

$$\phi_F : H^*_\tau(B\mathscr{G}) \to HP^*_F(C^\infty_c(\mathscr{G})), \tag{106}$$

qu'ajuste dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} H^*_\tau(B\mathscr{G}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_F"'] & HP^*(C^\infty_c(\mathscr{G})) \\ & HP^*_F(C^\infty_c(\mathscr{G})), \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \tag{107}$$

de manière que ce dernier devient commutatif. À la fin, cela signifie que l'image du morphisme (105) consiste uniquement de cocycles cycliques bornés et c'est précisément cela que l'on voulait dire lorsque on disait ci-dessus que tous les cocycles provenant de la géométrie du groupoïde sont bornés. Commençons par rappeler la définition du bicomplexe dont la cohomologie donne $H^*_\tau(B\mathscr{G})$:

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On pose $D^{n,m}(\mathscr{G}) := \Omega^m(\mathscr{G}^{(n)})$, c'est à dire, les $m-$formes différentielles sur la variété $\mathscr{G}^{(n)}$. On va définir deux différentielles

$$d : D^{n,m}(\mathscr{G}) \to D^{n,m+1}(\mathscr{G}) \text{ et}$$

$$\delta : D^{n,m}(\mathscr{G}) \to D^{n+1,m}(\mathscr{G}).$$

[4]qui proviennet de la cohomologie totale du groupoïde

La première est donnée par la différentielle de de Rham, $d := (-1)^n d_R$, avec le signe intercalé. La deuxième est donnée par

$$\delta := \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i$$

où $\delta_i := d_i^*$ (pullback de formes) pour $i = 0, ..., n+1$ et les $d_i : \mathscr{G}^{(n+1)} \to \mathscr{G}^{(n)}$ sont les morphismes simpliciaux associés à $\mathscr{G}$:

$$d_i(\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}) = \begin{cases} (\gamma_2, ..., \gamma_n) & \text{si } i = 0 \\ (\gamma_1, ..., \gamma_i \cdot \gamma_{i+1}, ..., \gamma_{n+1}) & \text{si } i = 1, ..., n+1 \\ (\gamma_1, ..., \gamma_n) & \text{si } i = n+1. \end{cases} \tag{108}$$

On obtient ainsi un bicomplexe $(D^{*,*}(\mathscr{G}), d, \delta)$ (voir par exemple [**CM00**]). En fait, la cohomologie total de ce bicomplexe donne par définition la cohomologie du groupoïde $H^*(\mathscr{G}, \mathbb{R}) := \bigoplus_i H^i(\mathscr{G}, \mathbb{R})$. Pour nous, $H^*(B\mathscr{G})$ est par définition la cohomologie de ce bicomplexe. En fait, Moerdijk a montré en [**Moe98**] qu'il s'agit bien de la cohomologie totale $H^*_\tau(B\mathscr{G})$. On a utilisé ci-dessus la notation $H^*_\tau(B\mathscr{G})$, cela veut dire que l'on considère la cohomologie $H^*(\mathscr{G}, or)$ où or est le faisceaux des orientations au-dessus de $\mathscr{G}$. Ici on va juste expliquer le cas orienté, c'est à dire, lorsque $\mathscr{G}^{(0)}$ est une variété orientable, dans ce cas le faisceaux or est constant.

On va à présent définir le morphisme (106), qui est une adaptation immédiate du morphisme de Connes, (105). On va commencer par définir une algèbre différentielle graduée auxiliaire : Posons $r = dim\,\mathscr{G}^{(n)}$, $\forall n \geq 0$. Soit $k > r$, on définit

$$\Omega^m_k(\mathscr{G}^{(n+1)}) := \Gamma^{k-m}_c(\mathscr{G}^{n+1}, \Lambda^m T^*\mathscr{G}^{n+1})$$

pour $m = 0, ..., r$. Autrement dit, on considère des m-formes différentielles à support compact sur $\mathscr{G}^{n+1}$ qui sont de classe $k-m$. Soit $I^{n,m}_k$ le sous-espace de $\Omega^m_k(\mathscr{G}^{(n+1)})$ engendré par

$$\{\omega \in \Omega^m_k(\mathscr{G}^{(n+1)}) : supp\,\omega \subset \{(\gamma_0, ..., \gamma_n) : \gamma_j = 1 \text{ pour une } j \neq 0\}\}.$$

On pose

$$\mathscr{A}^{n,m}_k := \Omega^m_k(\mathscr{G}^{(n+1)})/I^m_k.$$

En fait,$\mathscr{A}^{n,m}_\infty$ est l'algèbre considérée par Connes dans la construction du morphisme (105). Dans notre cas les mêmes différentielles marchent aussi : $d' : \mathscr{A}^{n,m}_k \to \mathscr{A}^{n+1,m}_k$ donnée par

$$d'(\omega)(\gamma_0, ..., \gamma_{n+1}) = \begin{cases} \omega(\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}) & \text{si } \gamma_0 = 1 \\ 0 & \text{si } sinon. \end{cases} \tag{109}$$

et $d'' : \mathscr{A}^{n,m}_k \to \mathscr{A}^{n,m+1}_k$ donnée par la différentielle de de Rham. On obtient ainsi un bicomplexe $(\mathscr{A}^{*,*}_k, d', d'')$. Posons $d_{\mathscr{A}} := d' + d'' : \mathscr{A}^p_k \to \mathscr{A}^{p+1}_k$ où

$$\mathscr{A}^p_k = \oplus_{n+m=p} \mathscr{A}^{n,m}_k \text{ et } \mathscr{A}_k := \oplus_{p \geq 0} \mathscr{A}^p_k.$$

On va donner à $\mathscr{A}_k$ un produit de forme que l'on aura une algèbre différentielle graduée $(\mathscr{A}_k, d_{\mathscr{A}})$. On commence par définir

$$\mathscr{A}_k^{n_1,m_1} \times \mathscr{A}_k^{n_2,m_2} \to \mathscr{A}_k^{n_1+n_2,m_1+m_2}.$$

Soit $\omega_i \in \Omega_k^{m_i}(\mathscr{G}^{n_i+1})$ pour $i = 1, 2$. On utilise le fait que $\mathscr{G}$ est un groupoïde étale pour identifier

$$T^*\mathscr{G}^{n_1+1} \cong T^*\mathscr{G}^{n_1+n_2+1} \text{ et } T^*\mathscr{G}^{n_2+1} \cong T^*\mathscr{G}^{n_1+n_2+1},$$

et on définit ainsi $\omega_1\omega_2 : \mathscr{G}^{n_1+n_2+1} \to T^*\mathscr{G}^{n_1+n_2+1}$ par la formule suivante

$$(\omega_1\omega_2)(\gamma_0, ..., \gamma_{n_1}, ..., \gamma_{n_1+n_2+1}) =$$

$$\sum_{\gamma\gamma'=\gamma_{n_1}} (\omega_1)(\gamma_0, ..., \gamma_{n_1-1}, \gamma) \wedge (\omega_2)(\gamma', \gamma_{n_1+1}, ..., \gamma_{n_1+n_2+1})$$

$$+ \sum_{j=0}^{n_1-2} (-1)^{n_1-j-1} \left[\sum_{\gamma\gamma'=\gamma_j} (\omega_1)(\gamma_0, ..., \gamma_{j-1}, \gamma, \gamma', ..., \gamma_{n_1-1}) \wedge (\omega_2)(\gamma_{n_1}, ..., \gamma_{n_1+n_2+1}) \right].$$

La remarque importante ici c'est que l'on a bien une application

$$\Omega_k^{m_1}(\mathscr{G}^{n_1+1}) \times \Omega_k^{m_2}(\mathscr{G}^{n_2+1}) \to \Omega_k^{m_1+m_2}(\mathscr{G}^{n_1+n_2+1})$$

parce qu'une application de classe s est aussi de classe q pour tout $q \leq s$. On a, comme Connes, une algèbre différentielle graduée $(\mathscr{A}_k, d_{\mathscr{A}})$. Avant de passer au prochain pas, on peut considérer un bi-sous-complexe de $(D^{*,*}(\mathscr{G}), d, \delta)$ qui donne la même cohomologie, il s'agit du bicomplexe normalisé :

$$D_N^{n,m} = \{\omega \in D^{n,m} : \omega(\gamma_1, ..., \gamma_n) = 0 \text{ si } \gamma_j = \text{ ou } \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\}.$$

Définissons

$$\phi_F : (D_N^{*,*}(\mathscr{G}), d, \delta) \to (C_F^{*,*}, b, B) :$$

Soit $\omega \in D_N^{n,r+m}(\mathscr{G})$ $(r = dim\,\mathscr{G}^{(q)}, \forall q)$. Ici, $-r \leq m \leq 0$, sinon $D_N^{n,r+m}(\mathscr{G}) = 0$. La forme ω induit un $(-m)$ courant

$$C_\omega : \Omega_k^{-m}(\mathscr{G}^{(n)}) \to \mathbb{C} : \eta \mapsto \int_{\mathscr{G}^{(n)}} \omega \wedge \eta.$$

Soit $L : \mathscr{G}^{(n)} \to \mathscr{G}^{(n+1)}$ l'application donnée par

$$L(\gamma_1, ..., \gamma_n) = ((\gamma_1 \cdots \gamma_n)^{-1}, \gamma_1, ..., \gamma_n)$$

et soit $\tilde{C}_\omega := L_*(C_\omega)$, c'est à dire, $\tilde{C}_\omega(\eta) = C_\omega(L^*(\eta))$. Grâce à que l'on a considéré les complexes normalisés on a que $\tilde{C}_\omega : \mathscr{A}_k^{n,-m} \to \mathbb{C}$ est bien définie. On peut donc définir

$$\tilde{C}_\omega : \mathscr{A}_k^l \to \mathbb{C}$$

pour $l = n - m$. On peut énoncer le théorème de Connes dans notre cadre.

Théorème 6.3.3 (Connes). *Soit $\omega \in D_N^{n,r+m}(\mathscr{G})$ $(-r \leq m \leq 0)$. Soit $k > r$ et $\tilde{C}_\omega : \mathscr{A}_k^l \to \mathbb{C}$ l'application induite comme ci-dessus, où $l = n - m$. Soient $f^0, ..., f^l \in C_c^k(\mathscr{G})$, on pose*

$$\phi_F(\omega)(f^0, ..., f^l) = \lambda_{n,m} \sum_{j=0}^{l} (-1)^{j(l-j)} \tilde{C}_\omega(d_{\mathscr{A}} f^{j+1} \cdots d_{\mathscr{A}} f^l \cdot f^0 \cdot d_{\mathscr{A}} f^{+1} \cdots d_{\mathscr{A}} f^j),$$

où $\lambda_{n,m} = \frac{n!}{(l+1)!}$. Alors ϕ_F définit un morphisme de bicomplexes

$$(D_N^{*,r+*}(\mathscr{G}), d, \delta) \to (C_F^{*,*}(\mathscr{G}), b, B)$$

et un morphisme

$$\phi_F : \bigoplus H^{*+r}(\mathscr{G}) \to HP_F^*(C_c^\infty(\mathscr{G})).$$

De plus, le diagramme (107) commute et ϕ_F est ainsi une inclusion comme facteur direct. En particulier tous les cocycles provenant de $H^*(B\mathscr{G})$ sont bornés.

La preuve de ce résultat est exactement la même que la preuve du théorème 14 dans [**Con94**] pp. 220. On a ajouté la commutativité du diagramme (107), mais cela est immédiat par définition.

Le résultat précédent va nous permettre de dire plus sur les accouplements du type $\langle ind\, D, \tau \rangle$ pour les groupoïdes étales : Pour ces groupoïdes la cohomologie cyclique (périodique) de $C_c^\infty(\mathscr{G})$ a été calculé dans [**BN94, Cra99**] en termes de la cohomologie de certains groupoïdes étales associé au groupoïde de départ .

D'abord, le bicomplexe $(C^{n,m}(C_c^\infty(\mathscr{G})), b, B)$ peut être modifié un peu. Changeons $C^n(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ par les distributions sur $\mathscr{G}^{(n+1)}$, *i.e.*, les applications linéaires continues $C_c^\infty(\mathscr{G}^{(n+1)}) \xrightarrow{\tau} \mathbb{C}$. Maintenant, des formules pour b et B peuvent être définies grâce à l'application linéaire surjective $\Phi : (C_c^\infty(\mathscr{G}))^{\otimes(n+1)} \to C_c^\infty(\mathscr{G}^{(n+1)})$ donnée par la multiplication ponctuelle. Alors, la cohomologie totale du bicomplexe $(C^{n,m}(C_c^\infty(\mathscr{G})), b, B)$ est la cohomologie cyclique périodique de $C_c^\infty(\mathscr{G})$ (pour plus de détails voir réf.cit.). Pour la cohomologie cyclique bornée définie ci-dessus, la modification adéquate est évidement de prendre les distributions sur $\mathscr{G}^{(n+1)}$ bornés, ce qui justifie aussi le nom choisi pour ces espaces.

Or, cette simplification permet de calculer la cohomologie cyclique périodique (voir par exemple [**Cra99**] théorèmes 4.1.2. et 4.2.5) : Soit $B^{(0)} = \{\gamma \in \mathscr{G} : s(\gamma) = r(\gamma)\}$ (les lacets de $\mathscr{G}$). Soit $B^{(0)} = \cup \mathscr{O}$ un recouvrement de $B^{(0)}$ consistant des ouverts $\mathscr{G} - invariants$[5]. Alors, on a

$$HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) = \Pi_{\mathscr{O}} H_\tau^{*+r}(B\mathscr{N}_{\mathscr{O}}), \tag{110}$$

[5]par l'action conjugaison $\eta^{-1}\gamma\eta$, avec γ un lacet.

où $\mathscr{N}_{\mathscr{O}}$ est un groupoïde étale associé à $\mathscr{O}$ (le normalisateur de $\mathscr{O}$, voir 3.4.8 dans réf.cit.) et où $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))|_{\mathscr{O}}$ est la localisation en $\mathscr{O}$. Lorsque $\mathscr{O} = \mathscr{G}^{(0)}$, $\mathscr{N}_{\mathscr{O}} = \mathscr{G}$.

Grâce au théorème 6.3.3 on sait que chaque facteur de $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$ dans la décomposition (110) consiste de cocycles bornés. Or, l'accouplement

$$HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G})) \times K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est bien défini. En particulier, la restriction à $HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))|_{\mathscr{O}}$ est nulle pour presque tout $\mathscr{O}$. On a comme conséquence immédiate du corollaire 6.2.2 le résultat suivant.

Corollaire 6.3.4. *Soit $\mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ un groupoïde étale. Pour tout $\tau \in HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$, l'application*

$$Ell(\mathscr{G}) \xrightarrow{ind} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \xrightarrow{\langle\_,\tau\rangle} \mathbb{C}$$

se factorise à travers $Ell(\mathscr{G}) \to K^0(A^*\mathscr{G})$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Ell(\mathscr{G}) \arrow[r, "ind"] \arrow[d, "symb."'] & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \arrow[r, "{\langle,\tau\rangle}"] & \mathbb{C} \\ K^0(A^*\mathscr{G}) \arrow[urr, "\tau"'] & & \end{tikzcd}.$$

6.4. Corollaires géométriques

Dans cette section $\mathscr{G} \rightrightarrows \mathscr{G}^{(0)}$ dénote un groupoïde étale.

Considérons le morphisme (105), $\phi : H_\tau^*(B\mathscr{G}) \to HP^*(C_c^\infty(\mathscr{G}))$. Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique. Pour $c \in H_\tau^*(B\mathscr{G})$, Connes a calculé l'accouplement

$$\langle \phi(c), ind\, D \rangle \in \mathbb{C}. \tag{111}$$

On énonce le résultat. Il s'agit du théorème 12 dans [**Con94**] pp. 272. Une preuve de ce résultat a été donnée par Gorokhovsky et Lott dans [**GL03**] en utilisant des super-connections en géométrie non commutative, après, dans [**GL06**] ils ont généralisé le résultat pour des groupoïdes qui sont Morita équivalentes à un groupoïde étale ("Foliation groupoids" dans le sens de [**CM01**]).

Théorème 6.4.1 (Connes). *Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde étale. Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique sur une $\mathscr{G}$-variété propre P avec $P/\mathscr{G}$ compacte. Soit $c \in H_\tau^*(B\mathscr{G})$ de dégrée total $2q$, alors on a*

$$\langle \phi(c), ind\, D \rangle = (2\pi i)^{-q} \langle c, ch_\tau([\delta_D]) \rangle. \tag{112}$$

Dans l'équation (112) ci-dessus on doit expliquer le côté droite : Associé à l'espace simplicial $B\mathscr{G}$ (avec un fibré τ) il y a un groupe $K_{*,\tau}(B\mathscr{G})$ de K-homologie (géométrique). Les $\mathscr{G}$-opérateurs pseudodifférentiels elliptiques définissent des éléments $[\delta_D] \in K_{*,\tau}(B\mathscr{G})$ de manière naturelle. Dans ce groupe (géométrique) il y a défini un caractère du Chern tordu (Dual)

$$ch_\tau : K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \rightarrow H^\tau_*(B\mathscr{G}), \tag{113}$$

donné par $ch_\tau(x) = Td(\tau_{\mathbb{C}})^{-1}ch(x)$. Dans la formule (112) l'accouplement de droite est l'accouplement naturel entre $H^\tau_*(B\mathscr{G})$ et $H^*_\tau(B\mathscr{G})$ et on a donc une formule comme celle qui apparaît dans le théorème classique de Atiyah-Singer, ([**AS68b**]).

Remarque 6.4.2. On continue avec les lignes de la remarque 6.2.4. L'équation (112) implique aussi que l'accouplement $\langle\phi(c), ind\, D\rangle$ ne dépend que de la classe du symbole $[\sigma_D] \in K^0(A^*\mathscr{G})$. L'avantage de notre formule (98) est que l'on a la même conclusion directement. De plus, la formule est valable pour tout cocycle cyclique borné, pas uniquement pour ceux qui sont dans l'image de ϕ (voir (105) et (106)).

Comme un corollaire immédiat du théorème précédent et la formule (98) ci-dessus, on a le résultat suivant.

Corollaire 6.4.3. *Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde étale. Soit D un $\mathscr{G}$-opérateur pseudodifférentiel elliptique sur une $\mathscr{G}$-variété propre P avec $P/\mathscr{G}$ compacte. Soit $c \in H^*_\tau(B\mathscr{G})$ de dégrée total $2q$, alors on a*

$$\langle\phi_F(c), ind_a^F\,[\sigma_D]\rangle = (2\pi i)^{-q}\langle c, ch_\tau([\delta_D])\rangle. \tag{114}$$

Remarque 6.4.4. Le théorème précédent implique le théorème 5.4 dans [**CM90**] (voir [**Con94**] pp. 272). Ce théorème, de Connes et Moscovici, à comme cas particulier la formule suivante :

$$Ind_{(c,\Gamma)}D_{sign} = Sign_c(M,\psi), \tag{115}$$

où (M,ψ) est une variété compacte, $\psi : M \rightarrow B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel $\tilde{M}$ de M ($\Gamma = \pi_1(M)$),D_{sign} est l'opérateur de signature en $\tilde{M}$ et $Ind_{(c,\Gamma)}D_{sign}$ représente l'accouplement de l'indice de D_{sign} avec le cocycle cyclique induit par $c \in Z^*(\Gamma,\mathbb{C})$. Le côte droite dans (115) est la haute signature de Novikov (par rapport à c). Une des conjectures les plus importantes en topologie et en géométrie (La conjecture de Novikov) prévoit que tous ces hautes signatures sont des invariants homotopiques du pair (M,ψ). Alors, si l'on savait que $Ind_{\Gamma)}D_{sign}$ est un invariant homotopique, on saurait que la conjecture de Novikov est vraie. Or, on sait que l'image de $Ind_\Gamma D_{sign}$ dans $K_0(C^*_r(\mathscr{G}))$ est un invariant par homotopie (grâce à un résultat de Mishchenko et Kasparov, voir [**Con94**] section $II.4$). On voit donc l'importance de prolonger l'action des cocycles cycliques à la K-théorie des C^*-algèbres. Dans le cas que l'on vient d'exposer (la formule (115) ci-dessus), Connes-Moscovici ont réussi à montrer la conjecture de Novikov pour des groupes Hyperboliques en montrant que pour ces groupes on a toujours l'extension des accouplements à la K-théorie de la C^*-algèbre correspondante.

Comme on a discuté dans la remarque précédente, prolonger l'action des accouplements avec des cocycles cycliques au niveau des C^*-algèbres serait d'une grande utilité. Malheureusement, ce problème reste très difficile à résoudre. On va énoncer un théorème de Connes dans le cadre des feuilletages où il a réussi à montrer que certains cocycles se prolongent à la $K-$théorie d'une C^*-algèbre. On va pas mentionner les corollaires géométriques qui s'en déroulent, pour cela on envoie le lecteur à [**Con86**] section 8. Pour pouvoir énoncer le résultat on doit introduire le morphisme de Baum-Connes :

En fait, la correspondance

$$D \mapsto ind_a(D) \in K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$$

induit un morphisme d'assemblage

$$\mu : K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \to K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \tag{116}$$

par la formule $\mu(\delta_D) = ind_a(\sigma_D)$. Ce morphisme a été définit par Baum et Connes (premièrement pour des groupes), vu pourquoi il est souvent appelé le morphisme de Baum-Connes (voir [**BC00**]). Une des conjectures les plus importantes en Géométrie non Commutative prévoit que ce morphisme est un isomorphisme (La conjecture de Baum-Connes, voir [**BCH94**] par exemple). Son importance repose sur les plusieurs conséquences géométriques et analytiques qui s'en déroulent.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat (théorème 8.1 dans [**Con86**]).

Théorème 6.4.5. *[Connes] Soit (V, F) une variété feuilletée (non nécessairement compacte) qui est orientée transversalement. Soit $\mathscr{G}$ son groupoïde d'holonomie et $\pi : B\mathscr{G} \to B\Gamma_q$ l'application classifiante ($q = codim\, F$), τ le fibré sur $B\mathscr{G}$ donné par le fibré transverse de (V, F). Soit $\mathcal{R} \subset H^*(B\mathscr{G})$ l'anneau engendré par les classes de Pontrjagin de τ, les classes de Chern des fibrés équivariants par holonomie et $\pi^*(H^*(WO_q))$. Pour tout $c \in \mathcal{R}$ il existe une application additive $\varphi_c : K_*(C_r^*(\mathscr{G})) \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\varphi_c(\mu(x)) = \langle ch_\tau(x), c\rangle \ \forall x \in K_*(C_r^*(\mathscr{G})). \tag{117}$$

Le théorème précédent s'agit principalement d'un problème d'extension : Dans l'énoncé, φ_c est justement l'extension à $K_*(C_r^*(\mathscr{G}))$ de $K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) \overset{\langle\phi(c),\cdot\rangle}{\longrightarrow}$

$\mathbb{C}$. Ensuite, un pas très importante dans la preuve s'agit du théorème de l'indice longitudinal de Connes-Skandalis, [**CS84**].

Dans notre cadre , le morphisme d'assemblage qui correspond est un morphisme

$$\mu_F : K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \to K_0^{B,F}(\mathscr{G}). \tag{118}$$

donné exactement comme en (116) mais avec l'indice analytique périodique, c'est à dire, $\mu_F(\delta_D) = ind_a^{B,F}(\sigma_D)$. Ce morphisme est bien défini par le théorème 5.1.6 et le théorème de l'indice longitudinal reinforcé. Par définition on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_{*,\tau}(B\mathscr{G}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\mu_F"'] & K_0(C_r^*(\mathscr{G})) \\ & K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{119}$$

On peut maintenant énoncer le résultat analogue. L'avantage est que on a pas besoin de résultats d'extension, on les a déjà de manière naturelle. Ceci fait que notre résultat s'appliquent a toutes les classes $c \in H^*(B\mathscr{G})$. De plus, le morphisme φ_c est donné par l'accouplement (104), c'est à dire,

$$\varphi_c = \langle \phi_F(c), \cdot \rangle.$$

La preuve du corollaire suivant nécessite aussi du théorème de l'indice longitudinal (renforcé), (théorème 6.1.6). On énonce le corollaire.

Corollaire 6.4.6. *Soit (V, F) une variété feuilletée (non nécessairement compacte) qui est orientée transversalement. Soit $\mathscr{G}$ son groupoïde d'holonomie. Pour tout $c \in H^*(B\mathscr{G})$ il existe une application additive*

$$\varphi_c : K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$\varphi_c(\mu_F(x)) = \langle ch_\tau(x), c \rangle \; \forall x \in K_0^{B,F}(\mathscr{G}). \tag{120}$$

6.4.1. Cohomologie de Haefliger (cf. [BH04]). Soit (M, F) une variété feuilleté compacte avec groupoïde d'holonomie $\mathscr{G}$ et de dim p (codim q). Dans [**BH04**], Benameur et Heitsch ont donné des formules d'indice en Cohomologie de Haefliger. On explique à continuation leurs résultats principaux et comment notre travail entre en jeu.

Commençons par rappeler rapidement la cohomologie de Haefliger de l'espace de feuilles M/F : Soit T une transversale complète. Dénotons par $\mathscr{H}$ le pseudogroupe d'holonomie induit par F en T. On pose $\Omega_c^r(M/F)$ le quotient de $\Omega_c^r(T)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $\omega - h^*\omega$ pour $h \in \mathscr{H}$ et $\omega \in \Omega_c^r(T)$. La différentielle de de Rham passe au quotient et on obtient un complexe $(\Omega_c^*(M/F), d_R)$. La cohomologie de Haefliger de M/F est la cohomologie de ce complexe, on la dénote par $H^*_{c,bas}(M/F)$. Une de caractéristiques importantes de ces espaces est que l'on dispose d'un morphisme d'intégration

$$\int_F : H^{p+k}(M) \to H^k_{c,bas}(M/F),$$

donné précisément par l'intégration longitudinal des formes.

Remarque 6.4.7. On utilise la notation $H^*_{c,bas}(M/F)$ comme dans [**CM04**], où cette cohomologie est appelée cohomologie basique. En général, ce n'est pas vrai que cet espace soit isomorphe à la cohomologie $H^*_c(\mathscr{G}_{hol})$. Il existe pourtant un morphisme

$$j_c : H^*_c(\mathscr{G}_{hol}) \to H^*_{c,bas}(M/F),$$

qui est un isomorphisme dans quelques exemples, e.g. lorsque l'espace de feuilles est un orbifold. Pour plus de détailles voir réf.cit.

Benameur et Heitsch commencent par définir un caractère de Chern algébrique

$$ch_a : K_0(C^\infty_c(\mathscr{G})) \to H^*_{c,bas}(M/F). \tag{121}$$

Ce caractère à la propriété fondamentale d'être compatible avec les "shriek maps" en K-théorie et en cohomologie de Haefliger. Autrement dit, pour $f : T \to M/F$ une application orienté ((M,F) feuilletage orienté), Benameur-Heitsch montrent (théorème 5.11 dans [**BH04**]) qu'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K^0(T) \arrow[r, "f_!^{\mathbb{R}^{2m}}"] \arrow[d, "ch(\cdot)\wedge Td(f)"'] & K_0(C^\infty_c(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \arrow[d, "ch_a^{\mathbb{R}^{2m}}"] \\ H^*(T,\mathbb{R}) \arrow[r, "f_!"'] & H^*_{c,bas}(M/F), \end{tikzcd} \tag{122}$$

où $ch_a^{\mathbb{R}^{2m}} = ch_a \circ \int_{\mathbb{R}^{2m}}$.

Avec la notation de la définition de l'indice topologique périodique, 6.1.4, l'application $K^0(T) \xrightarrow{\mathscr{M}} K_0(C^\infty_c(\mathscr{G}_\Omega)) \xrightarrow{i} K_0(C^\infty_c(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m}))$ en (91) est une application du type $f_!^{\mathbb{R}^{2m}}$, en effet, elle est égale à $h!$. De plus, si on considère l'application

$$ind_t^g := K^0(F) \xrightarrow{Bott} K^0(A\mathscr{G}_\Omega) \xrightarrow{Thom^{-1}} K^0(T) \xrightarrow{h!} K_0(C^\infty_c(\mathscr{G} \times \mathbb{R}^{2m})), \tag{123}$$

où $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ est l'inclusion considéré en 6.1.4, on a que la commutativité du diagramme précédent permet de montrer la formule d'indice suivante en cohomologie de Haefliger.

THÉORÈME 6.4.8 (Benameur-Heitsch). *Pour tout* $u \in K^0(F)$ *on a*

$$ch_a(ind_t^g(u)) = (-1)^p \int_F \pi_F!(ch(u))Td(F \otimes \mathbb{C}) \in H^*_{c,bas}(M/F), \tag{124}$$

où $\pi_F! : H_c^*(F, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ *est l'intégration le long des fibres, et* $ch : K^0(F) \to H_c^*(F)$ *est le caractère de Chern usuel. En particulier,* $ch_a \circ ind_t^g$ *ne dépend pas de* g.

Avant de continuer on a besoin de quelques propriétés du caractère ch_a.

PROPOSITION 6.4.9. *Le caractère* ch_a *satisfait les propriétés suivantes :*
(i) ch_a *passe au quotient en homotopie.*
(ii) ch_a *se prolonge à la* K*-théorie bornée de* $\mathscr{G}$*, i.e.,*

$$ch_a : K_0^F(\mathscr{G}) \to H^*_{c,bas}(M/F).$$

(iii) ch_a *est compatible avec Bott modulo intégration. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} K_0(C_c^\infty(\mathscr{G})) & \xrightarrow{Bott} & K_0(C_c^\infty(\mathscr{G}^{\mathbb{R}^2})) \\ \downarrow{\scriptstyle ch_a} & & \downarrow{\scriptstyle ch_a} \\ H^*_{c,bas}(M/F) & \xleftarrow[\int_{\mathbb{R}^2}]{} & H^*_{c,bas}(M \times \mathbb{R}^2/\tilde{F}). \end{array} \tag{125}$$

(iv) ch_a *se prolonge à la* K*-théorie bornée inductive de* $\mathscr{G}$*, i.e.,*

$$ch_a : K_0^{B,F}(\mathscr{G}) \to H^*_{c,bas}(M/F).$$

DÉMONSTRATION. (i) Ce fait a été montré dans la preuve du théorème 4.1 dans [**BH04**].

(ii) L'élément essentiel dans la construction de ch_a est l'existence d'une trace gradué (lemme 3.2 dans [**BH04**]),

$$Tr : \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E)\widehat{\otimes}\Omega^*(M) \to \Omega^*(M/F).$$

Le théorème du noyau de Schwartz permet d'identifier $\Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E)$ avec $C_c^\infty(\mathscr{G}, Hom(E))$ (voir [**NWX99**]). Vu de cette forme, la trace Tr d'un élément $T \in \Psi^{-\infty}(\mathscr{G}, E)\widehat{\otimes}\Omega^m(M)$ est la $m-$forme de Haefliger définie par

$$Tr(T) = \int_F tr(K(\bar{x}, \bar{x}))dx,$$

où K est le noyau de Schwartz de T, $\bar{x}$ est la classe dans $\mathscr{G}$ de x et $tr(K(\bar{x}, \bar{x}))$ est la trace usuelle de $K(\bar{x}, \bar{x}) \in End(E_{\bar{x}}) \times \Omega^m T^* M_x$. Or, K est à priori une section de classe C^∞ de $Hom(E)\widehat{\otimes}\Omega^*(M)$ au-dessus de $\mathscr{G}$. Il est clair que si on considère des sections du même fibré mais de classe de différentiabilité finie, l'intégrale dans la définition de Tr cidessus continue à être bien définie. De plus, on peut procéder comme

Benameur-Heitsch, et construire $ch_a : K_0(C_c^k(\mathscr{G})) \to H^*_{c,bas}(M/F)$ (pour k assez grand). Finalement, du point (i) ci-dessus, on déduit que ch_a est bien défini en $K_0^F(\mathscr{G})$.

(iii) Il suffit de remarquer que pour le feuilletage $(\mathbb{R}^2, F = 0)$, le caractère $ch_a : K_0(C_c^\infty(\mathbb{R}^2)) \to H_c^*(\mathbb{R}^2)$ coïncide avec le caractère de Chern usuel. Maintenant, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^2} ch(Bott) = 1,$$

ce qui permet de conclure la commutativité de (125).

(iv) Il est une conséquence immédiate des trois derniers points.

□

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de notre théorème de l'indice longitudinal, 6.1.6 et du théorème ci-dessus, 6.4.8.

Corollaire 6.4.10. *Pour tout $u \in K^0(F)$ on a la formule d'indice suivante*

$$ch_a(ind_a^{B,F}(u)) = (-1)^p \int_F \pi_F!(ch(u))Td(F \otimes \mathbb{C}) \in H^*_{c,bas}(M/F), \tag{126}$$

où $\pi_F! : H_c^*(F, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ est l'intégration le long des fibres, et $ch : K^0(F) \to H_c^*(F)$ est le caractère de Chern usuel.

Démonstration. Du théorème 6.1.6 on a $ind_t^{B,F} = ind_a^{B,F}$. De la proposition précédente, le caractère ch_a peut être défini en $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$. La conclusion est immédiate du théorème 6.4.8. □

Dans [**BH04**], les auteurs énoncent un résultat plus fort que 6.4.10, à savoir, que pour tout $u \in K^0(F)$ on a la formule d'indice suivante (corollaire 6.5 réf.cit.)

$$ch_a(ind_a(u)) = (-1)^p \int_F \pi_F!(ch(u))Td(F \otimes \mathbb{C}) \in H^*_{c,bas}(M/F), \tag{127}$$

où $ind_a(u) \in K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$ est le C^*-indice analytique.

Or, pour pouvoir énoncer la formule (127) ci-dessus, on doit être d'abord autorisé à prendre ch_a d'un élément de $K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$. Ceci est possible grâce à un théorème de Connes (Thm. 8.1 dans [**Con86**]) où il montre que pour les cocycles cycliques qui proviennent de l'anneau $\mathcal{R}$ de 6.4.5, les accouplements correspondants se prolongent à la K-théorie de la C^*-algèbre. Il se trouve que ce résulte permet également de prolonger ch_a à $K_0(C_r^*(\mathscr{G}))$.

Dans notre cadre, le résultat 6.4.10 ne nécessite pas des résultats d'extension. On retrouve ainsi les formules d'indice de Benameur-Heitsch en utilisant uniquement la structure géométrique et algébrique du groupoïde d'holonomie du feuilletage. Le fait que les actions d'une très large classe des cocycles cycliques se prolongent de manière naturelle à notre groupe $K_0^{B,F}(\mathscr{G})$ permet de penser que des formules comme celles de Benameur-Heitsch pourraient être développées à valeurs dans des espace cohomologiques plus complexes, pas uniquement dans $H^*_{c,bas}(M/F)$.

Bibliographie

[ANS06] Johannes Aastrup, Ryszard Nest, and Elmar Schrohe, *A continuous field of C^*-algebras and the tangent groupoid for manifolds with boundary*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 482–506.

[AS63] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.

[AS68a] ———, *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530.

[AS68b] ———, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[BC00] Paul Baum and Alain Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Enseign. Math. (2) **46** (2000), no. 1-2, 3–42.

[BCH94] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math., vol. 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 240–291.

[BH04] Moulay-Tahar Benameur and James L. Heitsch, *Index theory and noncommutative geometry. I. Higher families index theory*, K-Theory **33** (2004), no. 2, 151–183.

[BH05] ———, *Index theory and non-commutative geometry. II. Dirac operators and index bundles*, arxiv :math.GT/0504385v1 (2005).

[BN94] J.-L. Brylinski and Victor Nistor, *Cyclic cohomology of étale groupoids*, K-Theory **8** (1994), no. 4, 341–365.

[Bot72] Raoul Bott, *Lectures on characteristic classes and foliations*, Lectures on algebraic and differential topology (Second Latin American School in Math., Mexico City, 1971), Springer, Berlin, 1972, Notes by Lawrence Conlon, with two appendices by J. Stasheff, pp. 1–94. Lecture Notes in Math., Vol. 279.

[CC00] Alberto Candel and Lawrence Conlon, *Foliations. I*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[CCGF$^+$99] José F. Cariñena, Jesús Clemente-Gallardo, Eduardo Follana, José M. Gracia-Bondía, Alejandro Rivero, and Joseph C. Várilly, *Connes' tangent groupoid and strict quantization*, J. Geom. Phys. **32** (1999), no. 2, 79–96.

[CM90] Alain Connes and Henri Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), no. 3, 345–388.

[CM00] Marius Crainic and Ieke Moerdijk, *A homology theory for étale groupoids*, J. Reine Angew. Math. **521** (2000), 25–46.

[CM01] ———, *Foliation groupoids and their cyclic homology*, Adv. Math. **157** (2001), no. 2, 177–197.

[CM04] ———, *Čech-De Rham theory for leaf spaces of foliations*, Math. Ann. **328** (2004), no. 1-2, 59–85.

[CMR07] Joachim Cuntz, Ralf Meyer, and Jonathan Rosenberg, *Topological and bivariant k-theory*, Oberwolfach Seminars, vol. 36, Birkhäuser, Berlin, 2007.

[Con79] Alain Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 725, Springer, Berlin, 1979, pp. 19–143.

[Con85] ———, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1985), no. 62, 257–360.

[Con86] ———, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 123, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986, pp. 52–144.

[Con87] ———, *Cyclic cohomology and noncommutative differential geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 879–889.

[Con94] ———, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[CR06] Paulo Carrillo Rouse, *An analytic index for lie groupoids*, arxiv :math.KT/0612455 (2006).

[CR07] ———, *A Schwartz type algebra for the tangent groupoid*, preprint (2007).

[Cra99] Marius Crainic, *Cyclic cohomology of étale groupoids : the general case*, K-Theory **17** (1999), no. 4, 319–362.

[CS84] Alain Connes and Georges Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 6, 1139–1183.

[CST04] Joachim Cuntz, Georges Skandalis, and Boris Tsygan, *Cyclic homology in non-commutative geometry*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 121, Springer-Verlag, Berlin, 2004, , Operator Algebras and Noncommutative Geometry, II.

[DLN06] Claire Debord, Jean-Marie Lescure, and Victor Nistor, *Groupoids and an index theorem for conical pseudomanifolds*, arxiv :math.OA/0609438 (2006).

[Ehr65] Charles Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

[GL03] Alexander Gorokhovsky and John Lott, *Local index theory over étale groupoids*, J. Reine Angew. Math. **560** (2003), 151–198.

[GL06] ———, *Local index theory over foliation groupoids*, Adv. Math. **204** (2006), no. 2, 413–447.

[God91] Claude Godbillon, *Feuilletages*, Progress in Mathematics, vol. 98, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.

[Goo85] Thomas G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loopspace*, Topology **24** (1985), no. 2, 187–215.

[Gor99] Alexander Gorokhovsky, *Characters of cycles, equivariant characteristic classes and Fredholm modules*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), no. 1, 1–23.

[Hae84] André Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Astérisque (1984), no. 116, 70–97, Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982).

[HS87] Michel Hilsum and Georges Skandalis, *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 3, 325–390.

[Kar78] Max Karoubi, *K-theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, An introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 226.

[Kar87] ______, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque (1987), no. 149, 147.

[Lan99] Serge Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 191, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Lan03] N. P. Landsman, *Quantization and the tangent groupoid*, Operator algebras and mathematical physics (Constanţa, 2001), Theta, Bucharest, 2003, pp. 251–265.

[LM89] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Mac87] K. Mackenzie, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 124, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Mel93] Richard B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1993.

[Mil71] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[MN05] Bertrand Monthubert and Victor Nistor, *A topological index theorem for manifolds with corners*, arxiv :math.KT/0507601 (2005).

[Moe98] I. Moerdijk, *Proof of a conjecture of A. Haefliger*, Topology **37** (1998), no. 4, 735–741.

[Moe02] Ieke Moerdijk, *Orbifolds as groupoids : an introduction*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 205–222.

[Mon03] Bertrand Monthubert, *Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners*, J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 1, 243–286.

[MP97] Bertrand Monthubert and François Pierrot, *Indice analytique et groupoïdes de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 2, 193–198.

[NWX99] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu, *Pseudodifferential operators on differential groupoids*, Pacific J. Math. **189** (1999), no. 1, 117–152.

[Pat99] Alan L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 170, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.

[Ren80] Jean Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer, Berlin, 1980.

[Ros94] Jonathan Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 147, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Sha78] Patrick Shanahan, *The Atiyah-Singer index theorem*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 638, Springer, Berlin, 1978, An introduction.

[Thu72] William Thurston, *Noncobordant foliations of S^3*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 511–514.

[Trè67] François Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[Trè80] ———, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1*, Plenum Press, New York, 1980, Pseudodifferential operators, The University Series in Mathematics.

[Tu99] Jean Louis Tu, *La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques*, K-Theory **16** (1999), no. 2, 129–184.

[Tu00] Jean-Louis Tu, *The Baum-Connes conjecture for groupoids*, C^*-algebras (Münster, 1999), Springer, Berlin, 2000, pp. 227–242.

[Vas01] S. Vassout, *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal*, Ph.D. thesis, Université de Paris 7, 2001.

[Win83] H. E. Winkelnkemper, *The graph of a foliation*, Ann. Global Anal. Geom. **1** (1983), no. 3, 51–75.